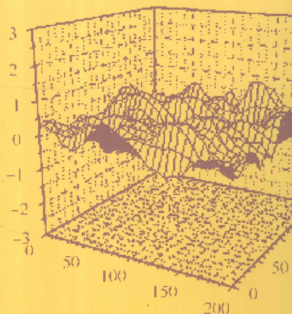
随机粗糙面散射的基本理论与方法

郭立新 王蕊 吴振森 编著





科学出版社
www.sciencep.com

科学出版社
电 话：010-64033541
E-mail: gcjs@mail.sciencep.com

销售分类建议：电磁学


ISBN 978-7-03-026124-3

定 价：58.00 元

随机粗糙面散射的基本理论与方法

郭立新　王　蕊　吴振森　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了随机粗糙面散射的基本理论与方法，内容主要包括随机粗糙面的建模及其电磁散射的计算方法、随机粗糙面与目标的复合电磁散射以及相关逆问题。

本书可供微波遥感、计算电磁学、电磁成像及复杂环境下雷达目标特征提取领域的广大科技工作者阅读，也可供相关专业高校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机粗糙面散射的基本理论与方法/郭立新，王蕊，吴振森编著．—北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-026124-3

Ⅰ.随… Ⅱ.①郭…②王…③吴… Ⅲ.电磁波散射-研究 Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 217379 号

责任编辑：任 静 王志欣 杨 然/责任校对：陈玉凤
责任印制：赵 博/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 1 月第一次印刷 印张：19 1/4
印数：1—2 000 字数：378 000

定价：58.00 元

前　言

电磁问题，按照特点可以分为散射、辐射和传播三类，其中，散射问题是最基本的问题，在一定程度上，辐射问题和散射问题是相互融合的，而波的传播问题，在许多情况下，依赖于对传播介质散射特性的研究。自然界中地面、海面均可以看成是满足某种特定概率密度分布的粗糙表面。随机粗糙表面的电磁散射特性研究在国防军事领域和民用技术领域都具有显著的学术价值和广泛的应用前景。随机粗糙表面的电磁散射研究之所以受到越来越多的关注，最主要的原因在于随机粗糙表面的电磁散射特性与确定性目标的电磁散射特性有着诸多的区别。对于确定性目标的散射问题而言，由于目标的轮廓和介电特性已经确定，所以特定的入射角和散射角对应的电磁散射系数也就随之确定。然而，对于随机粗糙表面而言，粗糙表面的轮廓随着时间或者空间随机地发生变化，所以其表面轮廓的主要特点是“随机性”。这一点有别于确定性目标的电磁散射问题，所以，随机粗糙表面的电磁散射问题专注于研究概率密度分布、统计参数等对粗糙表面的电磁散射特性的影响。

鉴于随机粗糙表面的电磁散射问题在军事及民用领域有着广泛的应用，近年来，各个国家都投入大量的人力、物力开展相关的研究工作。例如，美国麻省理工学院的辐射实验室、美国喷气推进实验室和美国海军实验室都曾设计出各种遥感雷达系统，这些系统能够比较精确地测量各种复杂背景表面的电磁散射系数。然而，随机粗糙表面背景的散射特性通常是随时间、空间而变化的，并且是与多种参数(土壤湿度、海水盐分、密度、温度及几何尺度等)有关的多元函数，因此，必须长期进行大范围的测量以得到可靠的实测数据。而随着计算机与计算技术的发展，计算机仿真模拟为我们提供了研究随机粗糙背景散射的一个有效、便捷的途径。同时，对随机粗糙面电磁散射机理和物理本质的深入研究，又为随机粗糙背景电磁散射的实际应用，如复杂背景下目标特征的提取等提供了必要的理论指导。

本书是作者及其所在的项目组对随机粗糙面散射的基本理论与方法进行的完整的搜集与整理，总结了自 2001 年起项目组开展的相关科学研究计划的科研成果，主要包括随机粗糙面的建模及其电磁散射计算方法、随机粗糙面与目标的复合电磁散射以及相关逆问题等一系列随机背景电磁散射热点问题。

全书共分 7 章，包括随机粗糙面建模、粗糙面电磁散射近似方法、粗糙(海)面电磁散射数值方法、分层粗糙面的电磁散射、动态海面散射杂波特征研究、粗糙面与目标的复合电磁散射、粗糙面电磁散射的相关逆问题。本书用 $e^{-i\omega t}$ 来表示时谐场中的时间因子。

本书是西安电子科技大学无线电物理实验室近年来各届博、硕士研究生共同辛勤劳动的结晶，没有他们的努力，就不可能有本书的完成。本书同时得到国家自然科学基金(60571058)、高等学校博士学科点专项科研基金(20070701010)等项目的资助与支持。

本书是作者近十年来从事随机粗糙面电磁散射特性研究工作的初步总结，由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，欢迎读者不吝指正。

作　者

2009 年 7 月于西安电子科技大学

目　录

第 1 章　随机粗糙面建模

1.1　随机粗糙面相关基本知识

实际的自然背景，如地面、海面、雪地、沙漠，以及各类人造表面等，均可以看成是二维随机粗糙面模型。对于一个给定的二维随机粗糙面，对光波来说可能呈现得很粗糙，而对微波来说却可能呈现得很光滑，这主要是因为随机粗糙面的粗糙度是以波长为度量单位的统计参数来表征的。描述随机粗糙面的统计量除功率谱密度外，还有高度起伏的概率密度函数和均方根高度、相关函数和相关长度、结构函数、特征函数、均方根斜率与曲率半径等。而在各种实际随机粗糙面模型中，有一类二维粗糙表面模型只沿着正交坐标系中的一个方向发生变化，而在另一个方向几乎不发生变化。为了便于研究，国内外的学者将这类实际粗糙表面简化成一维粗糙表面模型[1~3]。尽管一维粗糙表面是最简单的粗糙表面模型，但是研究一维粗糙表面模型的电磁散射特性仍然具有重要的实际意义和广泛的应用价值。本节通过介绍一维随机粗糙面的各个相关统计概念来对随机粗糙面的特性进行详细说明。

1. 高度起伏概率密度函数

以一维情况为例，设随机粗糙面的高度起伏为 $z=f(x)$，如图 1.1 所示。它的概率密度函数反映了高度起伏的分布情况，用 $p(f)$ 表示，则 $p(f)\mathrm{d}f$ 为相对于平均平面高度为 $z\sim z+\mathrm{d}z$ 的概率。获得了高度分布的概率密度函数 $p(f)$，就可以求出粗糙面的其他一些统计参量，如高度起伏的均值、高度起伏的均方根等。

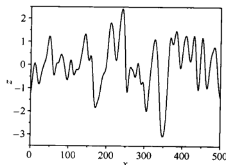


图 1.1　一维随机粗糙面示意图

高度起伏的均值定义为

$$\bar{f} = E[f(x)]_s = \int_{-\infty}^{\infty} f p(f) \mathrm{d}f \tag{1.1}$$

$E[\cdot]_s$ 表示沿整个粗糙面求平均，通常都选取适当的参考面（一般取 $z=0$ 平面），使得相对于此参考面的高度 $f(x)$ 的均值为零，这会给计算带来很大的方便。

2. 高度起伏均方根

粗糙面的高度起伏均方根 δ 是反映粗糙面粗糙程度的一个基本量，它的最原始定义为

$$\delta = \sqrt{E[f^2(x)]_s - \{E[f(x)]_s\}^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 p(f) \mathrm{d}f - \left[\int_{-\infty}^{\infty} f p(f) \mathrm{d}f\right]^2} \tag{1.2}$$

通常可以通过数值计算得到：若以适当间隔对粗糙面进行离散，设采样点数为 N，采样间隔为 Δx，根据经验，Δx 一般选择为 $\Delta x \leqslant 0.1\lambda$（$\lambda$ 为入射波波长），然后对离散值 $f(x_i)$ 进行数值计算，计算公式为

$$\delta^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} (f_i)^2 - N \cdot (\bar{f})^2\right] \tag{1.3}$$

其中，$\bar{f} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i$。

3. 相关函数

对于特定分布的粗糙表面，单一的均方根 δ 并不能唯一地描述粗糙面的特性，相关函数表明随机表面上任意两点间的关联程度，定义自相关函数为

$$G(R) = E[f(x) f(x+R)] \tag{1.4}$$

式(1.4)中当 $R=0$ 时，$G(0)=\delta^2$。进一步定义归一化自相关函数，即相关系数为

$$\rho(R) = \frac{G(R)}{\delta^2} = \frac{E[f(x) f(x+R)]}{\delta^2} \tag{1.5}$$

其中，δ^2 是表面的高度起伏均方差。一般随机粗糙面上的两点距离 R 增大，自相关函数减小。相关函数的形状取决于表面的类型，减小的快慢取决于表面两点不相关的距离。

高斯分布的相关函数

$$G(R) = \delta^2 \exp\left(\frac{-R^2}{l^2}\right) \tag{1.6}$$

其中，l 为相关长度，$R=|x_1-x_2|$。

指数分布相关函数可以定义为

$$G(R) = \delta^2 \exp\left(\frac{-|R|}{l}\right) \tag{1.7}$$

相关系数 $\rho(R)$ 在 $R=0$ 时具有最大值1，随着 R 的增大，$\rho(R)$ 逐渐减小，当 $R\to\infty$ 时，$\rho(R)\to 0$。把 $\rho(R)$ 降至 $1/\mathrm{e}$ 时的 R 值称为表面相关长度，记为 l，即 $\rho(l)=1/\mathrm{e}$。

表面相关长度是描述随机粗糙面各统计参量中的一个最基本量，它提供了估计表面上两点相互独立的一种基准，即如果表面上两点在水平距离上相隔距离大于 l，那么该两点的高度值从统计意义上说是近似独立的。在极限情况下，即当表面为光滑表面(镜面)时，面上每一点与其他各点都是相关的，相关系数 $\rho(R)=1$，相关长度 $l\to\infty$。

4. 功率谱密度

将非归一化的 $G(R)$ 相关函数进行 Fourier 变换，就可以得到高度起伏的功率谱密度 $S(k)$，即

$$S(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(R)\exp(\mathrm{i}kR)\mathrm{d}R \tag{1.8}$$

同样，相关函数也可以表示为 $S(k)$ 的逆 Fourier 变换

$$G(R)=\int_{-\infty}^{\infty}S(k)\exp(-\mathrm{i}kR)\mathrm{d}k \tag{1.9}$$

高斯分布随机粗糙面的功率谱密度为

$$S(k)=\frac{\delta^2 l}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{-k^2l^2}{4}\right) \tag{1.10}$$

指数分布的随机粗糙面的功率谱密度为

$$S(k)=\frac{\delta^2 l}{\pi(1+k^2l^2)} \tag{1.11}$$

5. 结构函数

对于具有分形特征的随机粗糙面[4]，如分数布朗运动(fractal Brown motion，FBM)随机粗糙面和 Weierstrass 分形函数所描述的随机粗糙面，其高度起伏的导数不连续，方差发散。而结构函数是一个平稳随机过程，因此，研究其特性常选用结构函数，结构函数定义为表面上两点高度差的均值，即

$$D(R)=E[[f(x)-f(x+R)]^2] \tag{1.12}$$

它与相关函数实际是等效的，对于平稳随机过程，结构函数与相关函数的关系为

$$D(R)=2\delta^2[1-G(R)] \tag{1.13}$$

采用结构函数的一个优点是它与测量表面高度所选取的参考面无关，从而给计算带来了方便。

6. 特征函数

特征函数定义为粗糙面高度起伏的概率密度函数的 Fourier 变换。这样一维特征函数的定义式为

$$\chi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p(f)\exp(-\mathrm{i}sf)\mathrm{d}f \tag{1.14}$$

它提供了粗糙表面对波的相位调制的测度,同样包含了高度起伏概率密度的信息。

7. 均方根斜率

均方根斜率定义为表面上每一点的斜率的均方根值,即

$$\delta_s = \sqrt{E\left[\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]} \tag{1.15}$$

它与谱函数之间的关系为

$$\delta_s = \{E[S^2]\}^{1/2} = \left[\int k^2 S(k)\mathrm{d}k\right]^{1/2} \tag{1.16}$$

1.2 随机粗糙面建模的蒙特卡罗方法

研究随机粗糙面的电磁散射特性,首先必须对粗糙表面进行建模。通过 1.1 节的简单介绍,了解了随机粗糙面功率谱的概念,利用功率谱函数,随机粗糙面可以采用蒙特卡罗(Monte Carlo)方法[5]来模拟生成。蒙特卡罗方法又称线性滤波法,其基本思想是在频域用功率谱对其进行滤波,再作逆快速傅里叶变换(inverse fast Fourier transform,IFFT)得到粗糙面的高度起伏。

1.2.1 一维粗糙面建模的蒙特卡罗方法

由于粗糙表面被认为是由大量的谐波叠加而成,谐波的振幅是独立的高斯随机变量,其方差正比于特定波数的功率谱 $S(k_j)$。按照这种思路,可以由下列函数生成长度为 L 的一维粗糙表面样本[5],即

$$f(x_n) = \frac{1}{L}\sum_{j=-N/2+1}^{N/2} F(k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_j x_n} \tag{1.17}$$

其中,$x_n = n\Delta x(n=-N/2+1,\cdots,N/2)$表示粗糙表面上第 n 个采样点,$F(k_j)$与$f(x_n)$称为 Fourier 变换对,定义为

$$F(k_j) = \frac{2\pi}{\sqrt{2\Delta k}}\sqrt{S(k_j)}\cdot\begin{cases}[N(0,1)+\mathrm{i}N(0,1)], & j=-N/2+1,\cdots,-1\\ N(0,1), & j=0,N/2\end{cases} \tag{1.18}$$

其中，定义离散波数 k_j 的表达式为 $k_j=2\pi j/L$，Δk 为谱域相邻的谐波样本的空间波数差，$S(k_j)$为粗糙表面的功率谱密度。$N(0,1)$表示均值为 0，方差为 1 的正态分布的随机数。当 $j>0$ 时，$F(k_j)$满足共轭对称关系 $F(k_j)=F(k_{-j})^*$。这样可以保证进行Fourier 逆变换后所得到的粗糙表面的轮廓 $f(x_n)$是实数。此外，在利用 Fourier 逆变换实现粗糙表面时，表面总长度 L 至少应当有 5 个相关长度，这样可以减少谱的重叠。由于合成过程的表面长度是有限的，表面自相关函数并不完全衰减到零，所以会有某种振荡存在。因此，为了反变换重新得到功率谱，需要对实数序列进行加窗处理，以避免边缘效应和谱的重叠问题。利用式(1.10)、式(1.17)和式(1.18)，就可以模拟一维高斯随机粗糙面。

图 1.2 给出了不同均方根高度、相关长度的一维高斯粗糙面样本数值模拟图形。高斯粗糙面是一种最为典型的粗糙面，从模拟图形可以看出，均方根高度和相关长度是粗糙面模拟中最基本而且极其重要的两个参数，它们的变化对粗糙面的起伏高度、起伏频繁程度都有很大的影响。从图 1.2 可以看出，当相关长度相同时，均方根高度越大，粗糙面的起伏程度就越大；而均方根高度固定时，相关长度越小，粗糙面变换就越剧烈，即变化的周期就越小。可见，均方根高度决定着粗糙面的"纵向"变化特性，相关长度决定着粗糙面的"横向"变化特性。

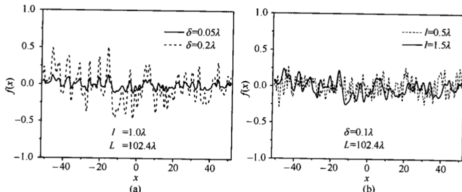


图 1.2　一维高斯随机粗糙面模型

同样，利用式(1.11)、式(1.17)和式(1.18)，就可以模拟一维指数随机粗糙面，图 1.3 给出了不同均方根高度、相关长度的一维指数粗糙面样本数值模拟图形。可以看出，指数粗糙面与高斯粗糙面起伏随均方根高度和相关长度的变化有着相同的特点。

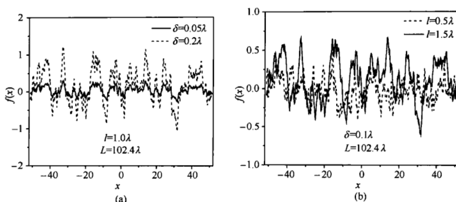


图 1.3 一维指数随机粗糙面模型

1.2.2 二维粗糙面建模的蒙特卡罗方法

与一维随机粗糙面的蒙特卡罗方法建模类似，假设要产生的二维随机粗糙面在 x 和 y 方向的长度分别为 L_x 和 L_y，等间隔离散点数分别为 M 和 N，相邻两点间的距离分别为 Δx 和 Δy，即有 $L_x \approx M\Delta x, L_y \approx N\Delta y$，则粗糙面上每一点 $(x_m = m\Delta x, y_n = n\Delta y)(m = -M/2+1,\cdots,M/2; n = -N/2+1,\cdots,N/2)$ 处的高度可表示为[6]

$$f(x_m, y_n) = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{m_k=-M/2+1}^{M/2} \sum_{n_k=-N/2+1}^{N/2} F(k_{m_k}, k_{n_k}) \exp[\mathrm{i}(k_{m_k} x_m + k_{n_k} y_n)] \tag{1.19}$$

其中，

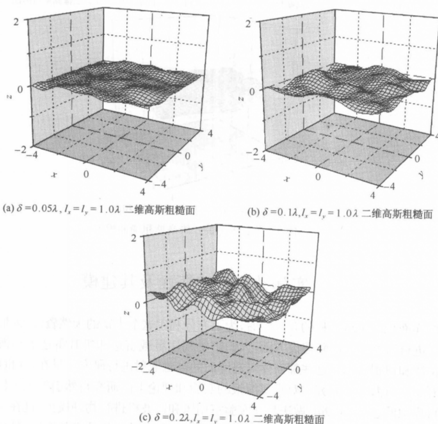
$$F(k_{m_k}, k_{n_k}) = 2\pi[L_x L_y S(k_{m_k}, k_{n_k})]^{1/2} \times \begin{cases} \dfrac{[N(0,1) + \mathrm{i}N(0,1)]}{\sqrt{2}}, & m_k \neq 0, M/2 \text{ 且 } n_k \neq 0, N/2 \\ N(0,1), & m_k = 0, M/2 \text{ 或 } n_k = 0, N/2 \end{cases} \tag{1.20}$$

同样，$S(k_x, k_y)$ 为二维随机粗糙面的功率谱密度，其中，$k_{m_k} = 2\pi m_k / L_x, k_{n_k} = 2\pi n_k / L_y$。与一维粗糙面的蒙特卡罗方法建模一样，为了使 $f(x_m, y_n)$ 为实数，其 Fourier 系数必须满足条件 $F(k_{m_k}, k_{n_k}) = F^*(-k_{m_k}, -k_{n_k}), F(k_{m_k}, -k_{n_k}) = F^*(-k_{m_k}, k_{n_k})$。在具体计算式(1.20)时，通常是利用二维 IFFT 来实现的。

二维高斯粗糙面[5,6]对应的功率谱为

$$S(k_x, k_y) = \delta^2 \frac{l_x l_y}{4\pi} \exp\left(-\frac{k_x^2 l_x^2 + k_y^2 l_y^2}{4}\right) \tag{1.21}$$

图 1.4 给出了均方根高度 δ 分别为 0.05λ, 0.1λ, 0.2λ 的二维高斯粗糙面模型，其中，相关长度 $l_x=l_y=1.0\lambda$，x 方向和 y 方向长度 $L_x=L_y=8.0\lambda$，每个波长采样 8 个点。可以发现，在相关长度相同的前提下，均方根高度越大，粗糙面的高度起伏变化就越大，粗糙面的轮廓所能达到的峰值和谷值就越大，这与前面一维高斯粗糙面的高度起伏变化特点是相同的。图 1.5 给出了相关长度 $l_x=l_y$ 分别为 0.5λ, 1.0λ, 1.5λ 的二维高斯粗糙面模型，其中，均方根高度 $\delta=0.1\lambda$，x 方向和 y 方向长度 $L_x=L_y=8.0\lambda$，每个波长采样 8 个点。可以发现，在均方根高度相同的条件下，相关长度代表了粗糙面的变化周期，相关长度越小，粗糙面变化就越频繁，峰值与峰值之间的距离越小，这一结论仍然与一维粗糙面相同。

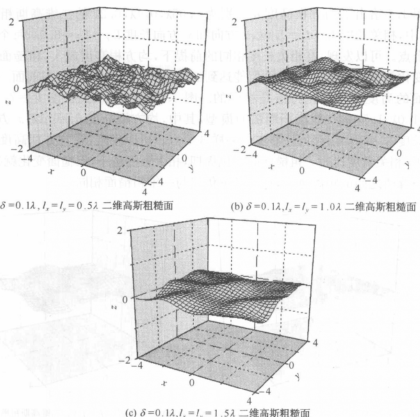


(a) $\delta=0.05\lambda$, $l_x=l_y=1.0\lambda$ 二维高斯粗糙面

(b) $\delta=0.1\lambda$, $l_x=l_y=1.0\lambda$ 二维高斯粗糙面

(c) $\delta=0.2\lambda$, $l_x=l_y=1.0\lambda$ 二维高斯粗糙面

图 1.4　不同均方根高度下的二维高斯粗糙面模型



(a) $\delta=0.1\lambda, l_x=l_y=0.5\lambda$ 二维高斯粗糙面　　(b) $\delta=0.1\lambda, l_x=l_y=1.0\lambda$ 二维高斯粗糙面

(c) $\delta=0.1\lambda, l_x=l_y=1.5\lambda$ 二维高斯粗糙面

图 1.5　不同相关长度下的二维高斯粗糙面模型

1.3　实际动态粗糙海面及其建模

海洋面积占全球面积的 3/4 左右，为了充分利用这个丰富的天然资源，人们需要对海洋进行遥感。在国防建设方面，人们需要利用星载雷达和机载雷达等在海洋背景下检测和识别目标。这些都需要对海洋面的电磁散射进行研究。早在 19 世纪，人们就开始了对海浪的研究。对真实海浪的实验和理论上的研究自然引发了人们对海浪进行模拟的想法，早期的做法是在实验室用风和造波机进行物理模拟，这在一定条件下具有可控性，方便了对海浪的测量和研究[7]。随着计算机技术的发展，数值模拟显示了更大的灵活性和可控性，更由于它的低成本使得数值模拟海面得到了广泛应用。国内外许多实验室都已建立模拟池来模拟实际海面进行实验测量或者外场测量，提出了各种各样的海谱模型和经验公式。海浪是空域和时域上高度不规则和不重复的物理现象，其变化形势是事先无法预知的。从定性的角度来说，海面是在大尺

度、近似周期性的波浪上叠加着波纹、泡沫和飞溅浪花。通常把大尺度波浪称为海面的大尺度结构，小尺度的波纹等则称为海面的微细结构。

1.3.1　实际粗糙海面的基本知识

下面介绍几种用来描述海面结构和状态的常用术语[8,9]。

(1)波。波是由于风作用于水面，通过与水面的摩擦作用使海水产生了波动，从而产生了波。风持续作用形成海浪，进而形成涌。

(2)重力波。重力波是传播速度主要受重力作用的波。重力波的时间标度为 0.1～25s，波长为 2cm～500m，高度最高可达 30m。

(3)张力波(或称毛细波、细浪)。这种波的传播速度主要由波动的传输介质液体表面的张力作用控制。表面张力波的时间标度为 0.1～0.01s，波长为 0.5～2cm，高度小于 1cm。

(4)风域。①风域是风在相同方向和速度下产生海浪的海面区域；②风域也可应用为在产生了海浪的风向上所测量的区域长度。

(5)涌。涌是由一些具有长波长、接近于正弦波形的波浪所组成的。这种海波的传播超出了它的产生区域。涌的特点是波形规整、波长长且波峰平滑。

(6)海态。海态用来描述海面粗糙度的数值化语言。海态还可以更精确地定义为波列中最高的 1/3 振幅的平均值。

有三种数值级数方式来描述海态，如表 1.1 所示，道格拉斯(Douglas)级数应用广泛，但被国际气象组织(WMO)代码 75 代替的第三种系统是蒲福风级，这种方式是用风速来描述的，如表 1.2 所示。

表 1.1　WMO 和 Douglas 尺度

海态级数	WMO 代码波高/英尺	Douglas 尺度	
		波高/英尺	海面粗糙度描述
0	0	0	平静的
1	0～1/3	<1	光滑的
2	1/3～5/3	3	轻微的
3	5/3～4	3～5	缓和的
4	4～8	5～8	粗糙的
5	8～13	8～12	很粗糙
6	13～20	12～20	高的
7	20～30	20～40	很高的
8	30～45	>40	陡峭的
9	>45	…	…

表 1.2　蒲福尺度

蒲福级数	术语描述	风速/节
0	静风	<1
1	弱风	3
2	轻柔风	6
3	微风	7～10
4	和风	11～16
5	劲风	17～21
6	强风	22～27
7		28～33
8	大风	34～40
9		41～47
10	暴风	48～55
11	强暴风	56～63
12	飓风	>64

注：1 节(速度单位)＝1 海里/h＝0.51444m/s

像其他介质一样，从电磁理论的观点看，海面的介质特性也以它的介电常数和电导率为特性。在研究电磁波与海面的相互作用中，海水的介电常数是一个非常重要的参数，它通常是电磁波频率、海水的温度和海水的含盐度的复函数。通常海水复介电常数的实部 ε'_{sw} 和虚部 ε''_{sw} 分别为

$$\varepsilon'_{sw} = 4.9 + \frac{\varepsilon_{sw0} - 4.9}{1 + (2\pi f \tau_{sw})^2} \tag{1.22a}$$

$$\varepsilon''_{sw} = \frac{2\pi f \tau_{sw}(\varepsilon_{sw0} - 4.9)}{1 + (2\pi f \tau_{sw})^2} + \frac{\sigma_i}{2\pi\varepsilon_0 f} \tag{1.22b}$$

其中，f 为电磁波的入射频率，ε_0 是自由空间介电常数，静态介电常数 ε_{sw0}，海水的张弛时间 τ_{sw} 和离子电导率 σ_i 分别都是海水的温度和含盐度的函数，其具体计算公式可参见文献[10]，在此不作赘述。这样，当给定工作频率时，通过测量海水温度和含盐度后就可以确定海水的介电常数。

1.3.2　实际动态粗糙海面的功率谱及蒙特卡罗方法建模

由海浪学的基本理论可知当海风吹向平静海面时，海浪主要由波长较小的短波组成，随着这些短波个数的增加，它们之间的非线性作用使能量传给波长更长的波，同时这个传递过程将持续到一个能量损耗与波的个数增加平衡的时刻，而且当达到平衡时，海面风速越大，海浪中长波能达到的波长越长。由于海能量的传送主要是依赖波长较小的短波完成的，所以一旦海风突然消失，这些短波将很快地衰

减,而长波则可以持续好几天。长波可以传送很远,它们的衰减系数很小,而短波则更多的是局限于某一较小区域,因此,海面上任一点的波都是由本地产生的短波和从其他地方传来的长波叠加而成的。

海浪是一个复杂的随机过程,从20世纪50年代Pierson率先将无线电噪声理论应用于海浪研究开始,利用谱函数描述和研究海浪特性就成为一个重要的方向,至今已经有多种海浪谱被提出,如PM谱、Fung完全海谱、JONSWAP谱等,其中,谱函数$S(k)$代表海浪能量相对于空间波数的分布,随着风速的增大,谱曲线下包围面积增大(即风浪的总能量增加),谱峰向较低的频率方向推移。

海浪按照恢复力的不同又可以分为重力波和张力波,其中,以海洋表面张力作为恢复力的波为张力波,而以重力作为恢复力的为重力波;在海浪形成中短波属于表面张力波,长波属于重力波,因此,一般的海浪波都是在重力波的基础上叠加张力波而成的。

1. 一维动态粗糙海面的功率谱及蒙特卡罗方法建模

与高斯粗糙面相同,海谱定义为海面高度相关函数的Fourier变换,它作为随机过程的二阶统计特性之一,直接给出了构成海面各谐波分量相对于空间频率和方位的分布,可以说是描述海面最基本的方法之一。采用统计方法模拟海面时,都是从海谱出发的,因此,有必要对其进行简单的介绍。到目前为止,众多学者已经提出了各种形式的海谱模型。

1)一维PM海谱及建模

PM海谱[11]是由Pierson和Moskowitz提出的,其表达式为

$$S_1(k)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{4|k|^3}\exp\left(-\dfrac{\beta g_c^2}{k^2U_{19.5}^4}\right), & k\geqslant 0\\ 0, & k<0\end{cases} \tag{1.23}$$

其中,α和β是无量纲经验常数,$\alpha=8.10\times10^{-3}$,$\beta=0.74$,g_c是重力加速度,$g_c=9.81\mathrm{m/s^2}$,$U_{19.5}$是海面19.5m高度处的风速。有了海面的功率谱以后,同样可以利用蒙特卡罗方法模拟一维动态粗糙海面模型,只不过是将式(1.17)改为如下形式:

$$f(x_n,t)=\frac{1}{L}\sum_{j=-N/2+1}^{N/2}F(k_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jx_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(k_j)t} \tag{1.24}$$

其中,

$$\omega(k_j)=\left\{g_c|k_j|\left[1+\left(\frac{k_j}{363.2}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \tag{1.25}$$

从图1.6(a)中可以看出,不论风速的取值大小如何,PM谱中总有一个峰值,其对应的频率为k_p,风速越大,k_p越小,这表明海表面受两种波谱共同影响。当

$k<k_p$ 时，功率谱满足正幂律谱，而当 $k>k_p$ 时，功率谱满足负幂律谱。从图 1.6(a)中还可以很明显地看出，随着风速的增大，PM 谱的峰值增大。图 1.6(b)中分别给出了 $t=0$ 时刻，海面长度为 320m，风速分别为 5m/s、7m/s 和 10m/s 时的 PM 海面模型。从图中可以看出随着风速的增大，海面的起伏增大，海浪的峰值增高，这是与现实情况是相符合的。

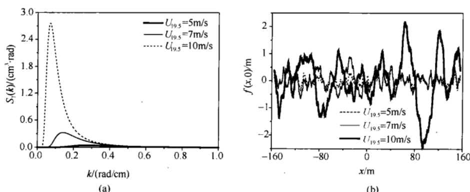


图 1.6 不同风速下的 PM 海谱及粗糙海面模型

2)一维 Fung 完全海谱

Fung 的半经验海谱是一种完全海谱[12]，它是建立在 PM 谱与 Pierson 提出的张力波谱的基础上的。当 $k<0.04$rad/cm 时应用重力波谱，当 $k>0.04$rad/cm 时应用张力波谱，并令当 $k=0.04$rad/cm 时二者谱密度相等，从而得到一种完全谱，而 Pierson 提出的张力波谱表达式为

$$S_2(k)=0.875/(2\pi)^{p-1}\Big/\left(1+\frac{3k^2}{k_m^2}\right)g_c^{(1-p)/2}\Big/\left[k\left(1+\frac{k^2}{k_m^2}\right)\right]^{-(p+1)/2} \tag{1.26}$$

其中，$g_c=981\mathrm{cm/s^2}$，$k_m=3.63$rad/cm，$p=5-\lg(U_*)$，U_* 是摩擦风速，单位为 cm/s。设已知高度为 z(cm)的风速为 U，则 U 与 U_* 之间的关系可以表示为

$$U=\frac{U_*}{0.4}\ln\left(\frac{z}{0.684/U_*+4.28\times10^{-5}U_*^2-0.0443}\right)\mathrm{cm/s} \tag{1.27}$$

这样，总的 Fung 完全海谱可表示为

$$S(k)=\begin{cases}S_1(k), & k<0.04\\ S_2(k), & k>0.04\end{cases} \tag{1.28}$$

其中，上式的 $S_1(k)$表达形式与式(1.23)相同，但参数 $\alpha=5.6\times10^{-3}$。

图 1.7 给出了不同摩擦风速下的半经验谱 S 随波数 k 的变化关系。

3)一维 JONSWAP 谱

Fung 的半经验海谱属于稳态海谱，即假设海面满足充分生成的条件，此时海态只与风速有关。这只是一种理想情况，而在实际中，由于波浪间能量转换的复杂

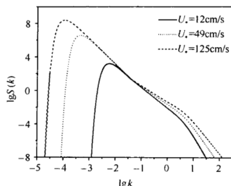


图 1.7　不同摩擦风速下半经验谱 $S(k)$(cm³ · rad)随波数 k(rad/cm)的变化关系

性及大气条件的多变性，海面多处于非稳态，还需要引入其他的参数来描述海面。20 世纪 60 年代末，英、荷、美、德等国为了适应北海开发的需要，于 1968～1969 年在丹麦、德国边境西海岸对海浪进行了系统观测，即联合北海波浪计划(Joint North Sea Wave Project,JONSWAP)，它是迄今为止对海浪最为系统的观测，由此得到了 JONSWAP 非稳态海谱模型[13]，它被认为是国际标准海洋谱。其一维形式为

$$S(\omega) = \alpha g_c^2 \frac{1}{\omega^5}\exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\right]\cdot \gamma^{\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2\omega_0^2}\right]} \tag{1.29}$$

其中，ω_0 为峰频率，γ 为峰升高因子，其定义为 $\gamma=E_{\max}/E_{\max}^{\mathrm{PM}}$，$E_{\max}$ 为谱峰值，$E_{\max}^{\mathrm{PM}}$ 为 PM 谱的峰值(γ 的观测值为 1.5～6，平均值为 3.3)，σ 称为峰形参数，其值为

$$\sigma = \begin{cases} 0.07, & \omega \leqslant \omega_0 \\ 0.09, & \omega > \omega_0 \end{cases} \tag{1.30}$$

无因次常数 $\alpha=0.076\tilde{x}^{-0.22}$，无因次风区 $\tilde{x}=g_c x/U_{10}^2$(x 为风区，U_{10} 为 10m 高度处的风速)，其值范围为 $10^{-1}\sim10^5$，无因次峰频率 $\tilde{\omega}_0=U_{10}\omega_0/g_c=22\tilde{x}^{-0.33}$。

图 1.8 给出了 JONSWAP 谱相对于风域的成长过程。可以很明显地看到谱曲线下的面积随风域增大，峰频率随风域减小的规律。当波浪在传播过程中随风域的增大成长时，峰频向低频率推移。

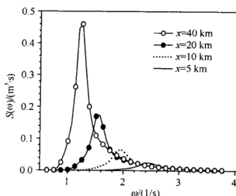


图 1.8　一维 JONSWAP 谱随风域的成长过程

2. 二维动态粗糙海面的功率谱及其蒙特卡罗方法建模

1)二维 Fung 海谱及其建模

在二维情况下,为了体现由于风向而使海谱呈现出来的各向异性,可以引入角度分布函数对其进行修正,即

$$S(k,\phi) = S(k)[a_0 + a_1(1 - \mathrm{e}^{-bk^2})\cos 2\phi] \tag{1.31}$$

其中,ϕ 是观察方向与逆风方向之间的夹角,a_0,a_1 是与 k 有关的量,b 是一个经验常数,它可通过比较由此海谱计算出来的雷达散射截面值与实测值而确定,根据现有的数据,$b \approx 1.5\mathrm{cm}^2$。

为确定 a_0,a_1,可利用斜率方差 σ_s^2。由公式

$$\sigma_s^2 = \sigma_{us}^2 + \sigma_{cs}^2 = \int_0^\infty k^2 S(k)\mathrm{d}k \tag{1.32}$$

可得

$$\sigma_{us}^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (k\cos\phi)^2 S(k,\phi)\mathrm{d}k\mathrm{d}\phi \tag{1.33}$$

$$\sigma_{cs}^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (k\sin\phi)^2 S(k,\phi)\mathrm{d}k\mathrm{d}\phi \tag{1.34}$$

σ_{us}^2 与 σ_{cs}^2 分别是逆风与侧风方向的斜率方差。将 $S(k,\phi)$ 的表示式代入式(1.33)和式(1.34),可得

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad a_1 = \frac{(1-R)/(1+R)}{\pi(1-B)} \tag{1.35}$$

其中,

$$B = \frac{1}{\sigma_s^2}\int_0^\infty k^2 S(k)\mathrm{e}^{-bk^2}\mathrm{d}k, \quad R = \frac{\sigma_{cs}^2}{\sigma_{us}^2} = \frac{0.003 + 1.92 \times 10^{-3} U_{12.5}}{3.16 \times 10^{-3} U_{12.5}}$$

$U_{12.5}$ 是高度为 12.5m 处的风速,单位为 m/s。

同样可以利用蒙特卡罗方法建立二维动态 Fung 海面,只是将式(1.20)改为

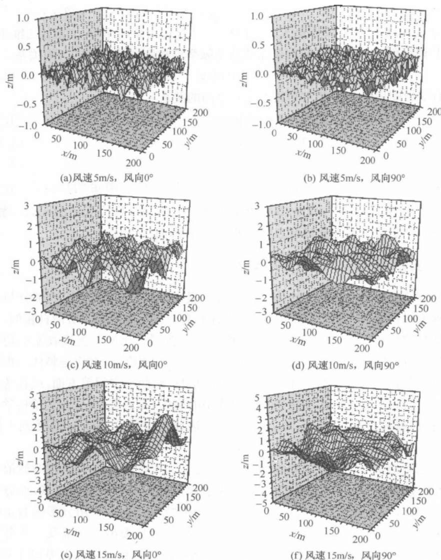
$$F(k_{m_k}, k_{n_k}) = 2\pi[L_x L_y S(k_{m_k}, k_{n_k})]^{1/2} \exp(\mathrm{i}\omega_{m_k,n_k} t) \begin{cases} \dfrac{[N(0,1) + \mathrm{i}N(0,1)]}{\sqrt{2}} \\ N(0,1) \end{cases} \tag{1.36}$$

其中,

$$\omega_{m_k,n_k} = \sqrt{g_c (k_{m_k}^2 + k_{n_k}^2)^{1/2}} \tag{1.37}$$

图 1.9 分别给出了利用蒙特卡罗方法模拟的 $t=0$ 时刻下,不同风速与风向下二维 Fung 海面模型。从图中可以看出:①当风速较小时,海面的局部变化很快,但整体起伏较小,而当风速增大时海面的整体起伏增大,但局部变化变慢,这与海浪的自然变化规律相符;②当风向不同时,波浪的起伏和运动方向不同。由此可

见，采用该方法构造的二维海面与实际情况相符，具有物理可行性。



(a)风速5m/s，风向0°　(b) 风速5m/s，风向90°
(c) 风速10m/s，风向0°　(d) 风速10m/s，风向90°
(e) 风速15m/s，风向0°　(f) 风速15m/s，风向90°

图 1.9　二维 Fung 海面模型

2)二维 JONSWAP 海谱及其建模

与二维 Fung 谱类似，在二维情况下，为了考虑风向的影响，也需要对 JONSWAP 引入一方向因子，即

$$S(\omega,\theta) = S(\omega)G(\omega,\theta) \tag{1.38}$$

假定方向分布与频率无关，式(1.38)中的方向因子为

$$G(\omega,\theta)=\begin{cases}(2/\pi)\cos^2(\theta-\psi), & -\pi/2+\psi<\theta<\pi/2+\psi\\ 0, & \theta\geqslant\pi/2+\psi,\theta\leqslant-\pi/2+\psi\end{cases} \tag{1.39}$$

其中，ψ 代表风向，θ 表示观察方向。同样也可以对用蒙特卡罗方法对二维 JONSWAP 谱海面进行模拟。利用海面的波高频率谱和波高波数谱之间的关系

$$S(\omega,\theta)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\theta=S(k,\theta)k\mathrm{d}k\mathrm{d}\theta=S(k_x,k_y)\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{1.40}$$

以及海谱时间域频率 ω 和空间域频率 k 之间的关系

重力波和张力波都考虑： $\omega^2=g_c k(1+k^2/k_m^2)$ (1.41a)

仅考虑重力波： $\omega^2=g_c k$ (1.41b)

仅考虑张力波： $\omega^2=g_c k^3/k_m^3$ (1.41c)

类似于式(1.36)，利用式(1.40)和式(1.41)，对于确定的 (k_x,k_y) 有 $k=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ 和 $\theta=\arctan(k_y/k_x)$，这样就会生成一组 (ω,θ)，然后再由 $S(k_x,k_y)$ 数组，即可以利用蒙特卡罗方法模拟二维 JONSWAP 海面。

1.3.3 实际动态粗糙海面的分形模型

“分形”的概念是由 Mandelbrot[4,14]首次提出的，分形指的是组成部分与整体以某种方式相似形，分形表征的是形体内部嵌套的自相似结构。所谓自相似，简单地讲就是缩放对称性，是指研究对象在所有方向按同一比例扩展或收缩的均匀线性变换。分形内部任何一个相对独立的部分，在一定程度上，都应是整体的再现和缩影，局部与局部、局部与整体在形态、功能、信息、时间与空间等方面，或在统计意义上具有自相似性。分形在物理化学生物中的应用，在地质、水文及气象科学中的应用，在地震科学中的应用，以及在海面雷达预警中的应用正日益受到人们的关注[15,16]。

实际海面是一个复杂的随机粗糙面，它是在大尺度的近似周期性的波浪上叠加着小尺度的波纹、泡沫和飞溅浪花，即由大尺度结构和微细结构组成，而分形具有自相似性，可兼顾大范围有序和小范围无序的特点，因此，可用分形函数来模拟粗糙海面。Jaggard 和 Sun[17]，Franceschetti 等[18]最早提出了一维及二维分形粗糙面模型，它们均是基于带限 Weierstrass 分形函数，文献[19]在此基础上将 PM 谱引入到带限 Weierstrass 函数中以模拟粗糙海面，我们曾利用基尔霍夫近似方法对这一分形粗糙海面模型的后向散射场的幅度分布特性进行了研究[20]。另一方面，从前面内容已经知道实际海浪波是由重力波和张力波共同形成的，同时实际海浪波的功率谱中既包含有正幂律部分也包含负幂律部分，而经典分形模型只能模拟负幂律部分，这就启发我们通过改进经典的带限 Weierstrass 分形海面模型以模拟考虑具有正、负幂律谱分布的实际粗糙海面[21,22]。

1. 一维分形海面模型

1) Weierstrass 分形函数

Mandelbrot 指出 Weierstrass 函数具有分形特性，其具体表达形式为[4]

$$W(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{[1-\exp(\mathrm{i}b^{n}t)]\exp(\mathrm{i}\varphi_{n})}{b^{(2-D)n}} \tag{1.42}$$

其中，φ_n 为任意的随机相位函数，D 为分维数且近似等于其豪斯道夫维数，参数 $b>1$。Weierstrass 分形函数的实部 $\mathrm{Re}[W(t)]$ 也具有分形特性，并且是一种数学意义上的分形函数。在此为了能更清楚地说明问题，令 $\varphi_n=0$，此时 Weierstrass 函数的实部为

$$C(t)=\mathrm{Re}[W(t)]_{\varphi_n=0}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{[1-\cos(b^{n}t)]}{b^{(2-D)n}} \tag{1.43}$$

从式(1.43)可以明显看出下面的标度性质成立：

$$C(bt)=b^{2-D}C(t) \tag{1.44}$$

图 1.10 给出了同一分维数 D 下的具有自仿射特性的曲线 $C(t)$。从图中可以很明显地看出虽然图 1.10(a)和(b)中在 t 轴上的标度范围不同，但是两幅图的曲线形状基本是一样的，这说明了在不同标度范围内 Weierstrass 函数曲线 $C(t)$ 的形状是不变的，即曲线虽然在 t 方向和 C 方向上均按照一定的比率在变化着，但曲线的基本形状却几乎不变，这说明了 Weierstrass 函数曲线具有自仿射性。

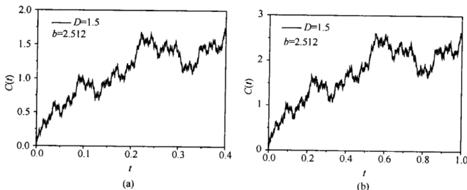


图 1.10　同一分维数 D 下的自仿射曲线

图 1.11 给出了不同分维数 D 下的 Weierstrass 函数曲线 $C(t)$，对比图 1.11(a)和(b)可以很明显地看出在横坐标区间相同的情况下，分维数大的曲线变化剧烈，而且分维数大的曲线在纵坐标起伏上也更大，即分维数越大的曲线变化越剧烈。

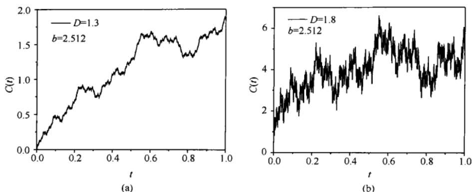


图 1.11　具有不同分维数的 Weierstrass 曲线

根据式(1.43)可以得到 Weierstrass 分形函数的方差为 $\delta^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b^{-(4-2D)n}$，显然当 n 取∞时，方差 δ^2 趋于无穷大，并且当 $n<0,b>1$ 时，方差 δ^2 随 b 指数地增大，这显然不满足物理意义上对粗糙面的要求。因此，必须用物理上的分形函数来代替纯数学上的分形函数，该函数既要保持原分形函数的主要特征，又要尽可能地描述随机粗糙面，这就需要对 Weierstrass 函数进行修正。以下引入带限 Weierstrass 分形函数模拟实际粗糙海面。

2)经典 Weierstrass 分形海面模型

基于带限 Weierstrass 分形函数的一维经典动态分形海面模型的表达式为[23]

$$f(x,t)=\delta\eta\times\sum_{n=0}^{N_f-1}b^{(D-2)n}\sin\{k_0b^n(x+Vt)-\omega_nt+\Phi_n(t)\}\qquad(1.45)$$

其中，δ 为海面的高度起伏均方根，η 为归一化因子，$|x|\leqslant L/2$，L 是粗糙面的模拟长度，$b>1$ 为尺度因子，并且当 b 是有理数时，$f(x,t)$ 表现为周期函数；当 b 是无理数时，$f(x,t)$ 表现为准周期函数，$1<D<2$ 是分形模型的分维数，并表征分形粗糙面的粗糙程度，N_f 表示模型中含有的正弦分量的个数，k_0 是粗糙海面的空间基波数，并决定空间海浪的基频，V 是观测雷达平台的运行速度，Φ_n 为$[-\pi,\pi]$上均匀分布的随机相位。$k_n=k_0b^n$ 表示空间波数，则 ω_n 可以表示为 $\omega_n=\sqrt{[g_ck_n+k_n^3(\tau_s/\rho)]}$，其中，$g_c=9.81\text{m/s}^2$ 表示重力加速度，τ_s 是海水表面张力，ρ 是海水密度。海面的高度起伏方根 δ 及基波波数 k_0 与海面风速之间满足下面的关系[24]：

$$\delta=0.0212U_{19.5}^2/4\qquad(1.46)$$

$$k_0=k_p=\frac{\omega_0^2}{g_c}=\frac{0877^2g_c}{U_{19.5}^2}\qquad(1.47)$$

取 $t=0\text{s}$ 和 $V=0\text{m/s}$，则可得经典分形模型的相关函数为

$$\rho(\tau)=\langle f(x)f(x+\tau)\rangle=\frac{\delta^2\eta^2}{2}\sum_{n=0}^{N_f-1}b^{2(D-2)n}\cos(k_0b^n\tau)\tag{1.48}$$

在 $\tau=0$ 时有

$$\delta^2=\rho(0)=\langle f(x)f(x)\rangle=\frac{\delta^2\eta^2}{2}\left[\frac{1-b^{2(D-2)N_f}}{1-b^{2(D-2)}}\right]\tag{1.49}$$

因此，归一化因子可写为

$$\eta=\frac{[2(1-b^{2(D-2)})]^{1/2}}{[1-b^{2N_f(D-2)}]^{1/2}}\tag{1.50}$$

根据式(1.48)可以得到分形海面的功率谱函数为

$$\begin{aligned}S(k)&=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\tau)\exp(-\mathrm{i}k\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{\delta^2\eta^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{N_f-1}b^{2(D-2)n}\cos(k_0b^n\tau)\exp(-\mathrm{i}k\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\delta^2\eta^2}{4}\sum_{n=0}^{N_f-1}b^{2(D-2)n}[\Lambda(k-k_0b^n)+\Lambda(k+k_0b^n)]\end{aligned}\tag{1.51}$$

其中，$\Lambda(\cdot)$表示狄拉克脉冲函数，则当 $b\to1$ 时，可以定义连续谱为

$$\bar{S}(k)=\frac{1}{k}\int_{k-\Delta k/2}^{k+\Delta k/2}S(k')\mathrm{d}k'=\begin{cases}0, & k<k_0\\ \dfrac{\delta^2\eta^2}{4\ln b}k_0^{(4-2D)}k^{(2D-5)}, & k\geqslant k_0\end{cases}\tag{1.52}$$

从式(1.52)可以看出，经典分形海面模型的功率谱函数仅包含负幂律指数部分，也就是说，只有海面功率谱中呈负幂律形式的部分才可以用式(1.45)模拟。

图 1.12 和图 1.13 给出了不同风速和分维数下的一维经典分形海面的轮廓曲线，其中，$N_f=10$。分别对比图 1.12 和图 1.13 的左右两幅图可以很明显地发现分维数 D 越大，轮廓曲线在细节方面变化得越剧烈，也就是说，粗糙面的变化越剧烈。这说明分维数 D 是表征分形粗糙面表面粗糙程度的一个特征量。对比图 1.12 和图 1.13 还可以看出风速越大，粗糙面高度起伏越大，这与实际海面高度起伏与风速之间的变化关系是吻合的。

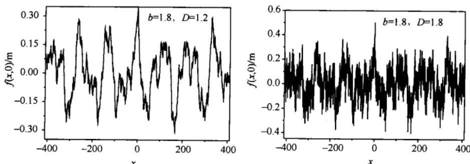


图 1.12　$U_{19.5}=5\mathrm{m/s}$ 时不同分维数的一维经典分形海面的轮廓曲线

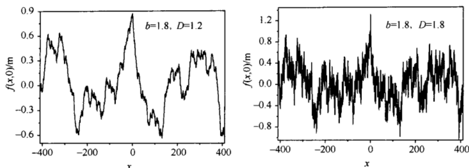


图 1.13 $U_{19.5}$=8m/s 时不同分维数的一维经典分形海面的轮廓曲线

3)改进 Weierstrass 分形海面

从前面的章节中可知实际海浪波的功率谱密度函数中,既包含有正幂律部分也包含负幂律部分,而经典分形模型只能模拟负幂律部分,这就启发我们用下面的改进分形海面模型来模拟实际海面,它可以表示为[22]

$$f(x,t)=\delta\eta\sum_{m=0}^{M-1}a^{-(D-\xi)m}\cos[k_0a^m(x+Vt)-\omega_mt+\beta_m]$$
$$+\delta\eta\sum_{n=0}^{N-1}b^{(D-2)n}\cos[k_0b^n(x+Vt)-\omega_nt+\phi_n] \tag{1.53}$$

其中,ξ 为模型中的正幂率因子,$a<1$ 是空间波数小于基波波数时的尺度因子,$b>1$ 为空间波数大于基波波数时的尺度因子,并且 $a=1/b$,β_m 和 ϕ_n 是$[-\pi,\pi]$上均匀分布的随机相位,其余参数的定义与经典分形海面一样。海面的高度起伏方根 δ 及基波波数 k_0 与海面风速之间依然满足式(1.46)和式(1.47)。取 $t=0$s 和 $V=0$m/s,则可得改进分形模型的相关函数为

$$\rho(\tau)=\langle f(x)f(x+\tau)\rangle=\frac{\delta^2\eta^2}{2}\sum_{m=0}^{M-1}a^{-2(D-\xi)m}\cos(k_0a^m\tau)+\frac{\delta^2\eta^2}{2}\sum_{n=0}^{N-1}b^{2(D-2)n}\cos(k_0b^n\tau) \tag{1.54}$$

在 $\tau=0$ 时有

$$\delta^2=\rho(0)=\langle f(x)f(x)\rangle=\frac{\delta^2\eta^2}{2}\left[\frac{1-a^{-2(D-\xi)M}}{1-a^{-2(D-\xi)}}+\frac{1-b^{2(D-2)N}}{1-b^{2(D-2)}}\right] \tag{1.55}$$

因此,归一化因子可写为

$$\eta=\left[\frac{2[1-a^{-2(D-\xi)}][1-b^{2(D-2)}]}{[1-a^{-2(D-\xi)M}][1-b^{2(D-2)}]+[1-a^{-2(D-\xi)}][1-b^{2(D-2)N}]}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.56}$$

根据式(1.54)可以得到分形海面的功率谱函数为

$$S(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\tau)\exp(-\mathrm{i}k\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\delta^2\eta^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{m=0}^{M-1} a^{-2(D-\xi)m}\cos(k_0 a^m \tau) + \sum_{n=0}^{N-1} b^{2(D-2)n}\cos(k_0 b^n \tau)\Big]\exp(-\mathrm{i}k\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\delta^2\eta^2}{4}\Big\{\sum_{m=0}^{M-1} a^{-2(D-\xi)m}\big[\Lambda(k-k_0a^m)+\Lambda(k+k_0a^m)\big] \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N-1} b^{2(D-2)n}\big[\Lambda(k-k_0b^n)+\Lambda(k+k_0b^n)\big]\Big\}
\end{aligned} \tag{1.57}
$$

当 $a\to1^-$ 和 $b\to1^+$ 时，可以定义连续谱为

$$
\bar{S}(k) = \frac{1}{k}\int_{k-\Delta k/2}^{k+\Delta k/2} S(k')\mathrm{d}k' = \begin{cases} -\dfrac{\delta^2\eta^2}{4\ln a}k_0^{(2D-2\xi)}k^{(2\xi-2D-1)}, & k<k_0 \\ \dfrac{\delta^2\eta^2}{4\ln b}k_0^{(4-2D)}k^{(2D-5)}, & k\geqslant k_0 \end{cases} \tag{1.58}
$$

通过式(1.58)可以发现改进分形模型的功率谱函数与实际海面的 PM 谱类似都是分为两段，在 $k<k_0$ 时功率谱满足正幂律，在 $k>k_0$ 时满足负幂律，可见采用改进分形模型，即式(1.53)替代经典分形模型(1.45)来模拟实际动态海面的功率谱与实际海面的海谱更接近。

在相同风速下将改进分形模型的功率谱与 PM 谱进行比较，可以发现当模型中的正幂率因子 $\xi=2.9$，尺度因子 $b=1/a=1.015$，分维数 $D=1.06$ 及 $M=N=400$ 时，改进分形模型的功率谱既包含正幂律部分又包含负幂律部分，并且与 PM 海谱能够较好地吻合，若将式(1.46)修正为 $\delta=1.62\times0.0212U_{19.5}^2/4$，二者之间的吻合更好。图 1.14 给出了不同风速下改进分形的功率谱密度函数与 PM 谱密度函数的比较。从图中可以看出二者在大部分的波数范围内吻合得都较好，只是在基波附近存在幅值上的差异。

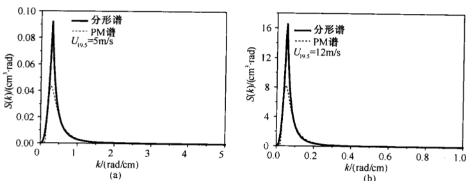


图 1.14　不同风速下改进分形模型的功率谱与 PM 谱的比较

图 1.15 给出了分别利用改进分形模型与 PM 谱模型模拟的不同风速下粗糙海面的表面轮廓曲线。从图中可以发现改进分形海面表面轮廓的基波波浪同 PM 海面的基波波浪基本是一致的，但分形模型的小尺度波浪更为明显，从而说明改进

分形海面模型能更好地描绘海面的细微结构。

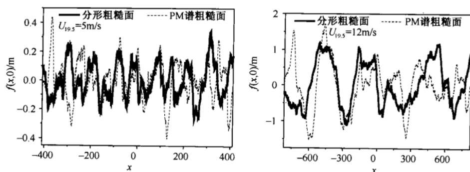


图 1.15 不同风速下改进分形模型与 PM 海面表面轮廓的比较

2. 二维改进分形海面模型

经典的二维 Weierstrass 分形海面模型表达式为[25]

$$f(x,y,t)=\delta\eta\times\sum_{n=0}^{N-1}b^{(D-3)n}\sin\{k_0b^n[(x+V_xt)\cos\beta_n+(y+V_yt)\sin\beta_n]-\omega_nt+\Phi_n\}\tag{1.59}$$

其中，δ 为海面的高度起伏均方根，η 为归一化因子，$2<D<3$ 是二维分形粗糙面模型的分维数，$b>1$ 为尺度因子，k_0 是基波波浪的空间波数，V_x 和 V_y 分别是雷达平台在 x 和 y 方向上的运动速度，β_n 为波浪的运动方向角，ω_n 是角频率，Φ_n 是$[-\pi,\pi]$上均匀分布的随机相位。海面的高度起伏均方根 δ 及基波波数 k_0 与海面风速之间的关系依然可以用式(1.46)和式(1.47)来表述。

同经典一维 Weierstrass 分形海面模型类似，经典二维分形海面模型只能较好地模拟粗糙海面功率谱的负幂律部分，但是由于二维海面的功率谱并不是单纯的负幂律谱，而是当空间波数大于基波波数时海面的功率谱函数近似是负幂律函数，当空间波数小于基波波数时，海面的功率谱函数近似满足正幂律函数关系，因此，与改进的一维分形海面模型类似，本书给出改进二维分形海面模型[21,22]

$$\begin{aligned}f(x,y,t)=&\delta\eta\times\sum_{m=0}^{M-1}a^{-(D-\xi)m'}\sin\{k_0a^m[(x+V_xt)\cos\beta_m+(y+V_yt)\sin\beta_m]-\omega_mt+\Phi_m\}\\&+\delta\eta\times\sum_{n=0}^{N-1}b^{(D-3)n}\sin\{k_0b^n[(x+V_xt)\cos\phi_n+(y+V_yt)\sin\phi_n]-\omega_nt+\Phi_n\}\end{aligned}\tag{1.60}$$

其中，a 是空间波数小于基波波数时的尺度因子，b 为空间波数大于基波波数时的尺度因子，β_m 和 ϕ_n 为波浪的运动方向角，ω_m 和 ω_n 是角频率，Φ_m 和 Φ_n 是$[-\pi,\pi]$

上均匀分布的随机相位。一般来说，式(1.60)中的 β_m 和 ϕ_n 是时间的函数，在较短时间内可以简单地认为和时间无关，并且 β_m 和 ϕ_n 满足 $E(\beta_m)=E(\phi_n)=\bar{\beta}_0$，其中，$\bar{\beta}_0$ 是风向和 x 轴的夹角，同时 $\psi_{1m}=\beta_m-\bar{\beta}_0$ 和 $\psi_{2n}=\phi_n-\bar{\beta}_0$ 的一阶概率密度函数满足最适合中国海域的 Donelan 方向函数模型[13]

$$P(k,\psi)=\frac{1}{2}\alpha\operatorname{sech}^2(\alpha\psi) \tag{1.61}$$

其中，

$$\alpha=\begin{cases}2.61(k/k_0)^{1.3}, & 0.65\leqslant k/k_0\leqslant 0.95\\ 2.28(k/k_0)^{-1.3}, & 0.95<k/k_0<1.6\\ 1.24, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.62}$$

ψ 为波浪运动方向同风向之间的夹角。

取 $t=0\text{s}, V_x=V_y=0\text{m/s}$，可以得到利用式(1.60)模拟的二维分形海面的空间相关函数

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{r})&=E_\beta E_\alpha[f(x,y)f(x+r_x,y+r_y)]\\&=\frac{\delta^2\eta^2}{2}\sum_{n=0}^{N-1}E_\beta\{b^{2(D-3)n}\cos[k_0b^n r\cos(\phi_n-\theta)]\}\\&\quad+\frac{\delta^2\eta^2}{2}\sum_{m=0}^{M-1}E_\beta\{a^{-2(D-\xi)m}\cos[k_0a^m r\cos(\beta_m-\theta)]\}\end{aligned} \tag{1.63}$$

为了得到闭合形式的相关函数，定义复空间相关函数为

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\boldsymbol{r},\theta)&=\frac{\delta^2\eta^2}{2}\sum_{m=0}^{M-1}E_\beta\{a^{-2(D-\xi)m}\exp[\mathrm{i}k_0a^m r\cos(\beta_m-\theta)]\}\\&\quad+\frac{\delta^2\eta^2}{2}\sum_{n=0}^{N-1}E_\beta\{b^{2(D-3)n}\exp[\mathrm{i}k_0b^n r\cos(\phi_n-\theta)]\}\end{aligned} \tag{1.64}$$

对比式(1.63)、式(1.64)可以看出空间相关函数应为复空间相关函数的实部，即 $\rho(\boldsymbol{r},\theta)=\mathrm{Re}[\tilde{\rho}(\boldsymbol{r},\theta)]$。应用关系式 $\exp(\mathrm{i}x\sin u)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)\exp(\mathrm{i}mu)$ 及 $\beta_m=\psi_{1m}+\bar{\beta}_0$，$\phi_n=\psi_{2n}+\bar{\beta}_0$，则式(1.64)可化为

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\boldsymbol{r},\theta)&=\pi\delta^2\eta^2\sum_{m=0}^{M-1}a^{-2(D-\xi)m}\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_l(k_0a^m r)S_m(l)\exp\left[\mathrm{i}l\left(-\bar{\beta}_0+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]\\&\quad+\pi\delta^2\eta^2\sum_{n=0}^{N-1}b^{2(D-3)n}\sum_{h=-\infty}^{\infty}J_h(k_0b^n r)S_n(h)\exp\left[\mathrm{i}h\left(-\bar{\beta}_0+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]\end{aligned} \tag{1.65}$$

其中，

$$S_m(l)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_m(\psi)\exp(-\mathrm{i}l\psi)\mathrm{d}\psi \tag{1.66}$$

$$S_n(h)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(\psi)\exp(-\mathrm{i}h\psi)\mathrm{d}\psi \tag{1.67}$$

取式(1.65)的实部，同时应用 $S_m(l)$ 和 $S_n(h)$ 的偶函数性质及 $J_m(ar)=(-1)^m J_{-m}(ar)$ 可得

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{r},\theta)=\pi\delta^2\eta^2\Bigg\{&\sum_{m=0}^{M-1}\frac{a^{-2(D-\xi)m}}{2\pi}J_0(k_0a^m r)+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{b^{2(D-3)n}}{2\pi}J_0(k_0b^n r)\\&+\sum_{m=1}^{M-1}2a^{-2(D-\xi)m}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l J_{2l}(k_0a^m r)S_m(2l)\cos[2l(-\bar{\beta}_0+\theta)]\\&+\sum_{n=1}^{N-1}2b^{2(D-3)n}\sum_{h=1}^{\infty}(-1)^h J_{2h}(k_0b^n r)S_n(2h)\cos[2h(-\bar{\beta}_0+\theta)]\Bigg\}\end{aligned} \tag{1.68}$$

在下面求解二维改进分形模型功率谱的过程中都取 $m=n$，相关函数就可以表示为以下的求和形式：

$$\rho(\boldsymbol{r},\theta)=\sum_{n=0}^{N-1}\rho_n(\boldsymbol{r},\theta) \tag{1.69}$$

其中，

$$\begin{aligned}\rho_n(\boldsymbol{r},\theta)=&\ \pi\delta^2\eta^2 a^{-2(D-\xi)n}\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_l(k_0a^n r)S_n(l)\cos\left[l\left(-\bar{\beta}_0+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]\\&+\pi\delta^2\eta^2 b^{2(D-3)n}\sum_{h=-\infty}^{\infty}J_h(k_0b^n r)S_n(h)\cos\left[h\left(-\bar{\beta}_0+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]\end{aligned} \tag{1.70}$$

同样将海谱也写成求和的形式，即

$$W(k,\phi)=\sum_{n=0}^{N-1}W_n(k,\phi) \tag{1.71}$$

其中，

$$W_n(k,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}r\rho_n(\boldsymbol{r},\theta)\exp[-\mathrm{i}kr\cos(\theta-\phi)]\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{1.72}$$

ϕ 为波浪运动方向同风向之间的夹角。

为了求得功率谱的闭式，在此仍然采用复空间相关函数代替空间相关函数进行求解，即应用复空间相关函数 $\tilde{\rho}_n(\boldsymbol{r},\theta)$ 的二维 Fourier 变换求解 $\tilde{W}_n(k,\phi)$，即

$$\tilde{W}_n(k,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}r\tilde{\rho}_n(\boldsymbol{r},\theta)\exp[-\mathrm{i}kr\cos(\theta-\phi)]\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{1.73}$$

将式(1.65)代入式(1.73)中可得

$$\begin{aligned}\tilde{W}_n(k,\phi)=&\ \pi\delta^2\eta^2 a^{-2(D-\xi)n}\sum_{l=-\infty}^{\infty}S_n(l)\exp[\mathrm{i}l(\phi-\bar{\beta}_0)]\int_0^{\infty}rJ_l(k_0a^n r)J_l(kr)\mathrm{d}r\\&+\pi\delta^2\eta^2 b^{2(D-3)n}\sum_{h=-\infty}^{\infty}S_n(h)\exp[\mathrm{i}h(\phi-\bar{\beta}_0)]\int_0^{\infty}rJ_l(k_0a^n r)J_l(kr)\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{1.74}$$

因为

$$S_n(-m)=S_n(m),\quad J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x),\quad \int_0^{\infty} rJ_l(ar)J_l(br)\mathrm{d}r=\frac{1}{a}\Lambda(a-b)$$

所以有

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_n(k,\phi)=&\pi\delta^2\eta^2 a^{-2(D-\xi)n}\frac{1}{k_0a^n}\Big\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}S_n(l)\exp[\mathrm{i}l(\phi-\bar{\beta}_0)]\Big\}\Lambda(k_0a^n-k)\\&+\pi\delta^2\eta^2 b^{2(D-3)n}\frac{1}{k_0b^n}\Big\{\sum_{h=-\infty}^{\infty}S_n(h)\exp[\mathrm{i}h(\phi-\bar{\beta}_0)]\Big\}\Lambda(k_0b^n-k)\end{aligned}\tag{1.75}$$

根据关系 $W_n(k,\phi)=\dfrac{\widetilde{W}_n(k,\phi)+\widetilde{W}_n(k,\phi+\pi)^*}{2}$ 及余弦函数的性质可以求得

$$\begin{aligned}W(k,\phi)=&\pi\delta^2\eta^2\sum_{n=0}^{N-1}a^{-2(D-\xi)n}\frac{1}{k_0a^n}\Big\{\sum_{l=1}^{\infty}S_n(2l)2\cos[2l(\phi-\bar{\beta}_0)]+\frac{1}{2\pi}\Big\}\Lambda(k_0a^n-k)\\&+\pi\delta^2\eta^2\sum_{n=0}^{N-1}b^{2(D-3)n}\frac{1}{k_0b^n}\Big\{\sum_{h=1}^{\infty}S_n(2h)2\cos[2h(\phi-\bar{\beta}_0)]+\frac{1}{2\pi}\Big\}\Lambda(k_0b^n-k)\end{aligned}\tag{1.76}$$

由于方向海谱和波浪的角分布函数满足以下的关系[26]：

$$W(k,\phi)k\mathrm{d}k\mathrm{d}\phi=S(k)G(k,\phi)\mathrm{d}k\mathrm{d}\phi\tag{1.77}$$

其中，波浪的方向分布函数 $G(k,\phi)$ 具有下面的性质：

$$\int_0^{2\pi}G(k,\phi)\mathrm{d}\phi=2\pi\tag{1.78}$$

把分形海谱写为如下形式：

$$W(k,\phi)=W_1(k)\Big[1+\frac{W_2(k,\phi)}{W_1(k)}\Big]\tag{1.79}$$

这样可以求得

$$S(k)=kW_1(k)\tag{1.80}$$

$$G(k,\phi)=1+\frac{W_2(k,\phi)}{W_1(k)}\tag{1.81}$$

设

$$W_1(k)=\frac{\delta^2\eta^2}{2}\sum_{n=0}^{N-1}a^{-2(D-\xi)n}\frac{1}{k_0a^n}\delta(k_0a^n-k)+\frac{\delta^2\eta^2}{2}\sum_{n=0}^{N-1}b^{2(D-3)n}\frac{1}{k_0b^n}\delta(k_0b^n-k)\tag{1.82}$$

那么由式(1.76)、式(1.79)及式(1.82)可得

$$\begin{aligned}W_2(k,\phi)=&2\pi\delta^2\eta^2\sum_{n=0}^{N-1}a^{-2(D-\xi)n}\frac{1}{k_0a^n}\Big\{\sum_{l=1}^{\infty}S_n(2l)\cos[2l(\phi-\bar{\beta}_0)]\Big\}\Lambda(k_0a^n-k)\\&+2\pi\delta^2\eta^2\sum_{n=0}^{N-1}b^{2(D-3)n}\frac{1}{k_0b^n}\Big\{\sum_{h=1}^{\infty}S_n(2h)\cos[2h(\phi-\bar{\beta}_0)]\Big\}\Lambda(k_0b^n-k)\end{aligned}\tag{1.83}$$

容易证明

$$\int_0^{2\pi} G(k,\phi)\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\left(1+\frac{W_2(k,\phi)}{W_1(k)}\right)\mathrm{d}\phi = 2\pi + \int_0^{2\pi}\frac{W_2(k,\phi)}{W_1(k)}\mathrm{d}\phi = 2\pi \quad (1.84)$$

以上推导给出了改进分形海面模型的表面轮廓谱函数。由式(1.76)可见其表面轮廓谱函数是脉冲的形式，而不是连续的。下面在式(1.76)的基础上推导给出连续谱的形式。由式(1.80)及式(1.82)可得

$$S(k) = \frac{k\delta^2\eta^2}{2}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} a^{-2(D-\xi)n}\frac{1}{k_0a^n}\Lambda(k_0a^n-k) + \sum_{n=0}^{N-1} b^{2(D-3)n}\frac{1}{k_0b^n}\Lambda(k_0b^n-k)\right\}$$

(1.85)

定义连续海谱为 $\bar{S}(k) = \frac{1}{\Delta k}\int_{k-\Delta k/2}^{k+\Delta k/2} S(k)\mathrm{d}k$，当 $a\to 1^-$，$b\to 1^+$ 且取 $a=1/b$ 时，把 $S(k)$ 代入并经数学计算可以得到

$$\bar{S}(k) = \begin{cases}\dfrac{\delta^2\eta^2}{2\ln b}k_0^{2(D-\xi)}k^{[-2(D-\xi)-1]}, & k<k_0 \\ \dfrac{\delta^2\eta^2}{2\ln b}k_0^{-2(D-3)}k^{[2(D-3)-1]}, & k\geqslant k_0\end{cases} \quad (1.86)$$

式(1.86)给出了连续海谱的表达形式，下面求解连续波浪分布函数。由式(1.81)可见要求解连续波浪分布函数，首先要求解 $W_2(k,\phi)$ 的连续函数。当 $k<k_0$ 时有

$$\bar{W}_2(k,\phi) = \frac{\pi\delta^2\eta^2}{\Delta K}\int_{k-\Delta k/2}^{k+\Delta k/2}\sum_{n=0}^{N-1} a^{-2(D-\xi)n}\frac{1}{k_0a^n}\left\{\sum_{l=1}^{\infty} S_n(2l)2\cos[2l(\phi-\bar{\beta}_0)]\right\}\Lambda(k_0a^n-k')\mathrm{d}k'$$

$$= -\frac{2\pi\delta^2\eta^2}{\ln a}k_0^{2(D-\xi)}k^{[-2(D-\xi)-2]}\sum_{l=1}^{\infty} S_n(2l)\cos[2l(\phi-\bar{\beta}_0)] \quad (1.87)$$

其中，$n=\left|\dfrac{\ln k-\ln k_0}{\ln a}\right|$。取 $a=1/b$，因此有

$$G(k,\phi) = 1+\frac{k\bar{W}_2(k,\phi)}{\bar{S}(k)} = 1+4\pi\sum_{l=1}^{\infty} S_n(2l)\cos[2l(\phi-\bar{\beta}_0)] \quad (1.88)$$

同理，当 $k\geqslant k_0$ 时有

$$G(k,\phi) = 1+\frac{k\bar{W}_2(k,\phi)}{\bar{S}(k)} = 1+4\pi\sum_{h=1}^{\infty} S_n(2h)\cos[2h(\phi-\bar{\beta}_0)] \quad (1.89)$$

在不考虑方向分布函数情况下，将二维改进分形模型的连续谱(1.86)和相同风速下的各向同性 PM 谱进行比较，可以发现当分形模型中的正幂率因子 $\xi=3.9$，尺度因子 $b=1.015$，$a=1/b$，分维数 $D=2.62$ 及 $N=400$ 时，两者吻合较好。由于分形模型能更精细地反映粗糙海面的细微结构，使得所模拟的分形海面的功率谱能量向较大的空间波数方向移动，为了使改进分形海面模型在基波波数附近

的谱和PM海谱能更好地吻合，通过比对两种谱的数值模拟结果，发现需引入修正因子ζ到高度起伏均方根与风速之间的关系式(1.46)中，这样就有

$$\delta=\frac{0.0212\zeta U_{19.5}^2}{4} \tag{1.90}$$

通过数值求解式(1.60)所模拟的分形海表面轮廓的功率谱，可以确定$\zeta\approx 1.65$，这与一维改进分形海面模型的情形类似。在选取以上参数条件下，本书提出的二维改进分形模型的功率谱与全域PM谱吻合得较好。

图1.16给出了不同风速下，经典分形模型、改进分形模型及PM海面的一阶和二阶相关函数的比较，其中，横坐标$L=(r_x^2+r_y^2)^{1/2}$。从图中可以看出在不同的风速下，由零阶Bessel函数所决定的改进分形模型和由各向同性PM谱经二维逆Fourier变换得到的一阶空间相关函数吻合较好，而经典分形模型与PM谱的一阶空间相关函数差别相对较大。同样，由图中还可以发现，由高阶Bessel函数所确定的，即考虑风向影响的(为简单并能说明问题起见，计算时取$\theta=0°,\bar{\beta}_0=0°$)二阶情况与文献[27]中有关的二阶PM谱相关函数结果吻合得较好，而经典分形模型海面的二阶相关函数与之相差较大。由于空间相关函数可直接由谱函数作逆Fourier变换得到，图1.16的计算结果也进一步说明了相对于经典分形模型的功率谱而言，改进分形模型的功率谱和经典的PM谱分布更趋于一致。

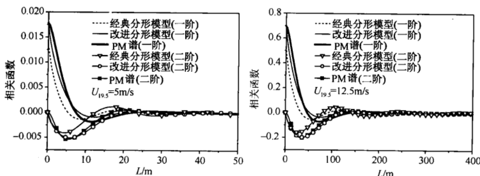
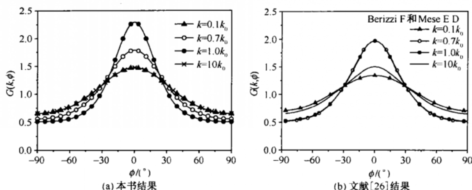


图1.16 不同风速下分形模型和PM谱模型海面轮廓相关函数的比较

图1.17计算了改进分形模型在空间波数取不同值时波浪的方向分布函数随方位角的变化，并与文献[26]中的Mitsuyasu方向分布函数结果进行了比较。从图中可以看出当空间波数等于基波波数时，海浪的方向分布最为集中，随着海浪空间波数的增大或减小，海浪的运动方向逐渐向空间各个方向展开，该结果和Mitsuyasu波浪方向分布函数的结论是一致的。这就证明了本书中的改进分形海面模型的各向异性特征是可靠的。

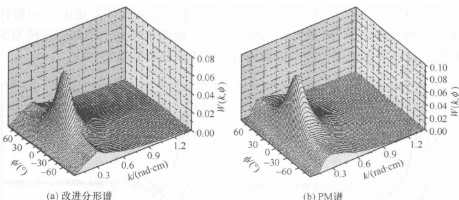
图1.18给出了风速为5m/s时二维改进分形模型的方向海谱$W(k,\phi)$与PM方向谱的比较。从图中可以看出改进分形模型的方向海谱同PM方向谱一样都是



(a) 本书结果　　(b) 文献[26]结果

图 1.17　不同空间波数时的方向分布函数

各向异性的，随着风向角度的不同，海谱的幅值大小是不同的，并且两者在峰值大小上存在差异。



(a) 改进分形谱　　(b) PM谱

图 1.18　不同风速下改进分形模型的方向海谱同 PM 方向海谱的比较

通过以上分析可知在一定的参数条件下，式(1.60)模拟的二维改进分形海面方向分布函数与文献结果吻合得较好，方向谱与实际海面 PM 谱吻合较好，即本书中提出的二维改进分形模型与经典分形模型相比，能更真实地模拟实际海面。

图 1.19～图 1.21 给出了不同分维数、风向及不同风速下的二维改进分形海面的表面轮廓示意图。比较每组中的两幅图可得与一维情况时类似的结论：分维数越大，粗糙面在细微结构上变化越剧烈，对应的粗糙面越粗糙。对比图 1.19 和图 1.20 还可以看出在风向不同时，海面的高度起伏方向是不同的，与二维 PM 海面的结果类似。对比图 1.19 和图 1.21 可以发现随着风速的增大，海面的高度起伏变大，这也与一维情况的结果类似。

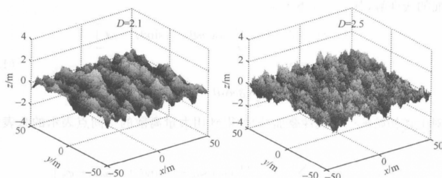


图 1.19　风速 $U_{19.5}=5\text{m/s}$，风向 $\beta_0=0°$ 时不同分维数的二维改进分形海面

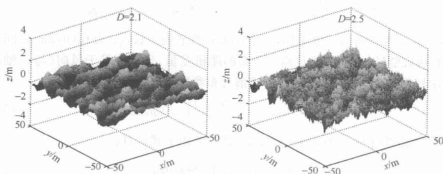


图 1.20　风速 $U_{19.5}=5\text{m/s}$，风向 $\beta_0=90°$ 时不同分维数的二维改进分形海面

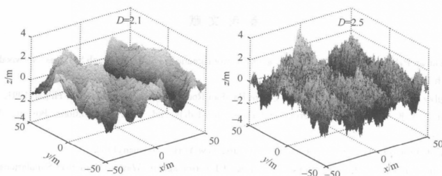


图 1.21　风速 $U_{19.5}=8\text{m/s}$，风向 $\beta_0=0°$ 时不同分维数的二维改进分形海面

1.3.4　海浪波方程

该方法是由 Neumann 和 Pierson 提出的，实现时，通过考虑拉格朗日关于运

动海面的线性解，其形式如下[16]：

$$\begin{cases} x(t) = \delta - \sin\left[\dfrac{\omega^2}{g}(\delta\cos\theta + y\sin\theta) - \omega t\right] \\ y(t) = y \\ z(t) = \cos\left[\dfrac{\omega^2}{g}(\delta\cos\theta + y\sin\theta) - \omega t\right] \end{cases} \tag{1.91}$$

通过对上述初始解进行线性叠加，即可得到用大量离散的空间点表示的海表面方程，即

$$\begin{cases} x(t) = \delta - \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \sin\left[\dfrac{\omega_n^2}{g}(\delta\cos\theta_n + y\sin\theta_n) - \omega_n t + \varphi_n\right] \\ y(t) = y \\ z(t) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \cos\left[\dfrac{\omega_n^2}{g}(\delta\cos\theta_n + y\sin\theta_n) - \omega_n t + \varphi_n\right] \end{cases} \tag{1.92}$$

其中，x,y,z 为海面的三维坐标，δ 为 x 轴上的平均步长，φ_n 为在$(0,2\pi)$之间均匀分布的随机变量，θ_n 为一满足高斯分布的随机变量，其均值等于风向（与 x 轴的夹角），方差为 0.5 左右，ω_n 为波浪的频谱分布参数，定义如下：

$$\int_0^{\omega_n} S(\omega)\,d\omega = \frac{2n-1}{2N}\int_0^{\infty} S(\omega)\,d\omega \tag{1.93}$$

a_n 为反映浪高的零均值高斯随机变量，其方差由下式计算：

$$\delta^2(a_n) = \frac{1}{N}\int_0^{\infty} S(\omega)\,d\omega \tag{1.94}$$

其中，$S(\omega)$为海谱，N 是在 x 或 y 方向离散的点数。

参 考 文 献

[1] Beckman P, Spizzichino A. The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces. Norwood: Artech House, 1987.

[2] Ogilvy J A. Theory of Wave Scattering from Random Rough Surface. Bristol: Adam Hilger, 1991.

[3] Fung A K. Microwave Scattering and Emission Models and Their Applications. Boston: Artech House, 1994.

[4] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman, 1982.

[5] Tsang L, Kong J A, Ding K H et al. Scattering of Electromagnetic Waves: Numerical Simulations. New York: Wiley Interscience, 2001.

[6] Kuga Y, Phu P. Experimental studies of millimeter-wave scattering in discrete random media and from rough surfaces. Progress in Electromagnetics Research, 1996, 14: 37 ~ 88.

[7] 徐德伦，于定勇. 随机海浪理论. 北京：高等教育出版社，2001.

[8] Nathanson F E, Reilly J P, Cohen M N. Radar Design Principles, Signal Processing and the Environment. 2nd ed. New York: McGraw Hill, 1991.

[9] Skolnik M. Radar Handbook. 2nd ed. New York: McGraw Hill, 1990.
[10] 焦培南，张忠治. 雷达环境与电波传播特性. 北京：电子工业出版社，2007.
[11] Thorsos E I. Acoustic scattering from "Pierson-Moskowitz" sea surface. J Acoust Soc Am, 1990, 88(1): 335～349.
[12] Fung A K, Lee K K. A Semi-empirical sea-spectrum model for scattering coefficient estimation. IEEE Journal of Oceanic Engineering. 1982, 7(4): 166～176.
[13] 俞聿修，柳淑学. 风浪方向分布模式的比较. 海洋工程，1995，13(4): 1～11.
[14] Mandelbrot B B. Intermittent turbulence in self-similar cascade: divergence of high moments and dimension of the carrier. J Fluid Mech, 1974, 62: 331～358.
[15] 沙震，阮火军. 分形与拟合. 杭州：浙江大学出版社，2005.
[16] 杜干. 目标检测的分形方法及应用. 西安：西安电子科技大学博士学位论文，2000.
[17] Jaggard D L, Sun X. Scattering from fractally corrugated surfaces. Journal of the Optical Society of America, 1990, 7(6): 1131～ 1139.
[18] Franceschetti G, Migliaccio M, Riccio D. An electromagnetic fractal-based model for the study of fading. Radio Science, 1996, 31(6): 1749～1759.
[19] Chen J, Lo K Y, Leung H et al. The use of fractals for modeling EM waves scattering from rough sea surface. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 1996, 34(4): 966～972.
[20] Guo L X, Wu Z S. Fractal model and electromagnetic scattering from time-varying sea surface. Electronics Letters, 2000, 36(21): 1810～1812.
[21] 王运华，郭立新，吴振森. 改进的二维分形模型在海面电磁散射中的应用. 物理学报，2006，55(10): 209～217.
[22] 王运华. 海面及其与上方目标的复合电磁散射研究. 西安：西安电子科技大学博士学位论文，2006.
[23] Berizzi F, Mese E D, Pinelli G. One-dimensional fractal model of the sea surface. IEE proc-Radar, Sonar Navig, 1999, 146(1): 55～64.
[24] Harrison G P, Wallace A R. Climate sensitivity of marine energy. Renewable Energy, 2005, 30(12): 1801～1817.
[25] Berizzi F, Mese E D. Scattering from a 2-D sea fractal surface: fractal analysis of the scattered signal. IEEE Trans Antennas Propagat, 2002, 50(7): 912～925.
[26] Berizzi F, Mese E D. Sea-wave fractal spectrum for SAR remote sensing. IEE Proc-Radar Sonar Navig, 2001, 148(2): 56～65.
[27] Bourlier C, Saillard J, Berginc G. Intrinsic infrared radiation of the sea surface. Progress in Electromagnetic Research, 2000, 27: 185～335.

第2章 粗糙面电磁散射近似方法

随机粗糙表面电磁散射的理论研究一直以来都是一个十分重要的研究课题，在许多科学研究和工程问题中均有着重要的应用，如微波遥感、光学表面特性研究、表面物理、无线通信、水下声学、海上风速、风场反演以及复杂背景与目标的复合电磁散射等领域均涉及粗糙面散射问题。当粗糙面尺寸满足一定条件时，电磁散射问题中某些电参量可进行合理近似，以简化求解过程。目前，计算粗糙面电磁散射问题的近似方法主要包括以下几类：

(1) 积分方程方法(integral equation method，IEM)，它从电场和磁场所满足的积分方程出发，得到了表面上切向电场和磁场的表达式，它包含两项，分别为Kirchhoff近似项和附加项，因此，比Kirchhoff近似要精确得多。

(2) 基尔霍夫近似(Kirchhoff approximation，KA)，又称为切平面近似，将粗糙曲面用局部切平面代替，由菲涅耳(Fresnel)反射定律获得切平面的总场，从而近似计算远区散射场。它适用于平缓型粗糙面，与入射波长相比，这种表面的平均水平尺寸较大，这时可以假设入射波好像照射到与该点相切的一个无限大平面上，因此，面上任何一点的总场强就可计算出来。对于均方根高度大的面，采用驻留相位近似法；对于均方根高度中等或小的表面，采用标量近似。Kirchhoff近似方法虽然形式简单，但是它只计算了单次散射，没有考虑多重散射和遮挡效应，并且只适用于小入射角情况。后来二阶Kirchhoff近似被提出，由于考虑了多重散射和传播遮挡及自遮挡等效应，精确度有了很大的提高。

(3) 微扰法(small perturbation method，SPM)是建立在Rayleigh假设基础上的，认为散射场可以用沿远离边界传播的未知振幅的平面波的叠加表示，未知振幅通过求解边界条件获得，受固有Rayleigh误差的影响，该方法仅适用于表面高度起伏远小于入射波长的情况，其优点是可以求解大入射角下的散射。

(4) 小斜率近似(small slope approximation，SSA)，这是基于表面斜率的级数展开的一种比较精确的近似方法，通过保留级数展开的不同项可以得到各阶小斜率近似，并且在一定的条件下可以退化为Kirchhoff近似和微扰法的结果。该方法适用于均方根斜率较小的粗糙面，而对表面的高度起伏没有限制。

(5) 双尺度方法(two-scale method，TSM)，该方法假设粗糙面由两种尺度构成，一种比入射波长大，一种比入射波长小，而小尺度粗糙面是按照表面大尺度粗糙面的斜率分布来倾斜的，这样就可以用微扰理论来计算小尺度粗糙面的散射系数，然后通过对大尺度的斜率分布求集平均的方法来考虑粗糙面的倾斜效应。

(6) 消光定理(extinction theorem,ET),该方法是将 Ewald-Oseen 消光定理作为一种边界条件和微扰理论相结合求解散射场。首先把粗糙表面的高度起伏作为参量将表面电磁场用幂级数进行展开,然后求解空间散射场满足的 Helmholtz 方程,将解用平面波的叠加来表示,最后通过比较各阶量前的系数得到散射场的各阶近似。这种方法没有作任何物理近似,对表面斜率没有限制,因而求解精度高、适用范围广,尤其适用于掠入射情况。

(7) 全波法(full wave algorithm,FWA),该方法从 Maxwell 方程组和边界条件出发,求出一组与实际边界有关的完备正交函数系,然后把所求散射场用这组函数系展开代入 Maxwell 方程和边界条件,得到一微分方程组,利用迭代法求解该方程组,求出待定系数的近似解,再代入积分方程式,最后利用最陡下降法求出待求场。这种方法比较严谨,对激励源和界面的介质情况没有任何限制,尤其是处理多层粗糙面的散射问题时比其他方法更有效,并且在高频近似和低频近似下,它可以分别退化成 Kirchhoff 近似和微扰法的解。

(8) 相位微扰法(phase perturbation technique,PPT),该方法可以应用于求解对任意入射波长而言粗糙度连续变化的粗糙面的散射问题。在适当的限制条件下,它可以退化为 Kirchhoff 近似和微扰法。相位微扰法的优点是:它使得平均散射强度能够明确地分离为镜向分量和漫射分量,但该方法在解决掠入射的情况时不够精确。

本章仅就以上较为典型的积分方程方法、Kirchhoff 近似方法、微扰法、小斜率近似方法和双尺度方法作简要介绍。

2.1　积分方程方法

2.1.1　散射场和散射功率

积分方程方法的基本思想就是把未知的表面场分为两部分,一部分为 Kirchhoff 场,即切面近似场;另一部分是补偿场,用来对 Kirchhoff 场进一步修正。假设平面波以下面的形式入射到一粗糙面上,如图 2.1 所示,其中,θ_i 和 θ_s 分别为入射角和散射角,ϕ_i 和 ϕ_s 分别为入射方位角和散射方位角,图 2.1 中假设入射面在 xz 面内,因此 $\phi_i=0$。入射波的电场和磁场分别为

$$\boldsymbol{E}^i=\hat{\boldsymbol{p}}E_0\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}]=\hat{\boldsymbol{p}}E^i \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{H}^i=\frac{\hat{\boldsymbol{k}}_i\times(\hat{\boldsymbol{p}}E^i)}{\eta_1} \tag{2.2}$$

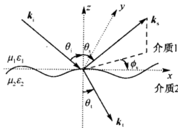


图 2.1　粗糙面电磁散射几何示意图

其中,$\boldsymbol{k}_i=\hat{\boldsymbol{k}}_ik_1=\hat{\boldsymbol{x}}k_{1x}+\hat{\boldsymbol{y}}k_{1y}+\hat{\boldsymbol{z}}k_{1z}$,$k_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$ 为波数,$\hat{\boldsymbol{k}}_i$ 为入射波的波矢量,$\hat{\boldsymbol{p}}$ 为入

射波的单位极化矢量，E_0 为入射电场的振幅，$\eta_1=\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$ 为粗糙面上半空间的波阻抗。

表面场的切向分量为 Kirchhoff 场和补偿场之和，即

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}=(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E})_{\mathrm{k}}+(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E})_{\mathrm{c}} \tag{2.3a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}=(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H})_{\mathrm{k}}+(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H})_{\mathrm{c}} \tag{2.3b}$$

其中，下标 k 和 c 分别表示 Kirchhoff 场和补偿场，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为粗糙表面的单位法矢量。

根据 Stratton-Chu 积分方程[1,2]，

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}=K\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\times\int\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}-\eta_1\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\times(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H})\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r})]\mathrm{d}s \tag{2.4}$$

不同极化状态下，粗糙面上半空间的远区散射场可表示为

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{pq}}^{\mathrm{s}}&=K\int\{\hat{\boldsymbol{q}}\cdot[\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\times(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}})+\eta_1(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}})]\}\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r})]\mathrm{d}s\\&=K\int[\hat{\boldsymbol{q}}\times\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\cdot(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}})+\eta_1\hat{\boldsymbol{q}}\cdot(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}})]\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r})]\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中，$K=\frac{\mathrm{i}k_1}{4\pi R}\exp(\mathrm{i}k_1R)$，$R$ 为照射面中心到观察点之间的距离，下角标 p 和 q 分别表示入射波极化状态和散射波极化状态，$\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}$ 为散射波极化矢量，可以表示为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}=k_1\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}=k_1(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_{\mathrm{s}}\cos\phi_{\mathrm{s}}+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta_{\mathrm{s}}\sin\phi_{\mathrm{s}}+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_{\mathrm{s}})=\hat{\boldsymbol{x}}k_{\mathrm{sx}}+\hat{\boldsymbol{y}}k_{\mathrm{sy}}+\hat{\boldsymbol{z}}k_{\mathrm{sz}} \tag{2.6}$$

$\hat{\boldsymbol{p}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{q}}$ 分别表示入射波和散射波的单位极化矢量，$\hat{\boldsymbol{p}}$ 在水平极化和垂直极化情况下可分别表示为 $\hat{\boldsymbol{h}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{v}}$，即

$$\hat{\boldsymbol{h}}=\hat{\boldsymbol{\phi}}=-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi_{\mathrm{i}}+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi_{\mathrm{i}} \tag{2.7a}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}=-\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_{\mathrm{i}}\cos\phi_{\mathrm{i}}+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta_{\mathrm{i}}\sin\phi_{\mathrm{i}}+\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_{\mathrm{i}} \tag{2.7b}$$

与之类似，$\hat{\boldsymbol{q}}$ 可以表示为 $\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}}$，即

$$\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}}=-\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi_{\mathrm{s}}-\hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi_{\mathrm{s}} \tag{2.8a}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}}=-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{s}}=-\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_{\mathrm{s}}\cos\phi_{\mathrm{s}}-\hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta_{\mathrm{s}}\sin\phi_{\mathrm{s}}+\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_{\mathrm{s}} \tag{2.8b}$$

在后向散射情况下 $\theta_{\mathrm{s}}=\theta_{\mathrm{i}}$，$\phi_{\mathrm{s}}=\phi_{\mathrm{i}}+\pi$，$\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{v}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{h}}$，将得到的切向场代入 Stratton-Chu 公式进行积分就得到散射场。显然，散射场也能够分成两部分：Kirchhoff 场和补偿场，即

$$E_{\mathrm{pq}}^{\mathrm{s}}=E_{\mathrm{pq}}^{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{pq}}^{\mathrm{c}} \tag{2.9}$$

$$E_{\mathrm{pq}}^{\mathrm{k}}=KE_0\int f_{\mathrm{pq}}\exp\{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}-\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}})\cdot\boldsymbol{r}\}\mathrm{d}s \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{pq}}^{\mathrm{c}}=\frac{KE_0}{8\pi^2}\int F_{\mathrm{pq}}\exp\{-\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}-\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}})\cdot\boldsymbol{r}+\mu(x-x')+\nu(y-y')\\+\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{r}']\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中，f_{pq}和F_{pq}分别为

$$f_{pq}=[\hat{q}\times\hat{k}_s\cdot(\hat{n}\times E_p)_k+\eta_1\hat{q}\cdot(\hat{n}\times H_p)_k]\frac{D}{E^i} \tag{2.12}$$

$$F_{pq}=8\pi^2[\hat{q}\times\hat{k}_s\cdot(\hat{n}\times E_p)_c+\eta_1\hat{q}\cdot(\hat{n}\times H_p)_c]\frac{D}{E^i} \tag{2.13}$$

$$D=(f_x^2+f_y^2+1)^{1/2} \tag{2.14}$$

粗糙面高度用$f(x,y)$来表示，f_x和f_y分别代表粗糙面沿x和y方向的导数。

由此可以得到散射场的总散射功率为

$$\langle E_{pq}^s E_{pq}^{s*}\rangle=\langle E_{pq}^k E_{pq}^{k*}\rangle+2\mathrm{Re}\langle E_{pq}^c E_{pq}^{k*}\rangle+\langle E_{pq}^c E_{pq}^{c*}\rangle \tag{2.15}$$

为了得到非相干散射功率，需要从总的散射功率中减去均方根功率，即

$$\begin{aligned}P_{pq}&=\langle E_{pq}^s E_{pq}^{s*}\rangle-\langle E_{pq}^s\rangle\langle E_{pq}^s\rangle^*\\&=\langle E_{pq}^k E_{pq}^{k*}\rangle-\langle E_{pq}^k\rangle\langle E_{pq}^k\rangle^*\\&\quad+2\mathrm{Re}[\langle E_{pq}^c E_{pq}^{k*}\rangle-\langle E_{pq}^c\rangle\langle E_{pq}^k\rangle^*]+\langle E_{pq}^c E_{pq}^{c*}\rangle-\langle E_{pq}^c\rangle\langle E_{pq}^c\rangle^*\\&=P_{pq}^k+P_{pq}^{kc}+P_{pq}^c\end{aligned} \tag{2.16}$$

其中，P_{pq}^k为Kirchhoff项，P_{pq}^{kc}为交叉项，P_{pq}^c为补偿项，它们的表达式分别为

$$P_{pq}^k=\langle E_{pq}^k E_{pq}^{k*}\rangle-\langle E_{pq}^k\rangle\langle E_{pq}^k\rangle^* \tag{2.17a}$$

$$P_{pq}^{kc}=2\mathrm{Re}[\langle E_{pq}^c E_{pq}^{k*}\rangle-\langle E_{pq}^c\rangle\langle E_{pq}^k\rangle^*] \tag{2.17b}$$

$$P_{pq}^c=\langle E_{pq}^c E_{pq}^{c*}\rangle-\langle E_{pq}^c\rangle\langle E_{pq}^c\rangle^* \tag{2.17c}$$

$\langle\ \rangle$表示集平均，* 表示取复共轭，Re 表示取实部。

2.1.2　散射系数

散射系数的定义为该方向上产生相同散射功率密度的各向同性等效散射体的总散射功率与照射面积上的总入射功率的比值，其数学表达式为[1]

$$\sigma_{pq}=\frac{4\pi R^2P_{pq}}{E_0^2A_0} \tag{2.18}$$

其中，A_0为照射面积。

可以将散射系数定义为三项之和的形式

$$\sigma_{pq}=\sigma_{pq}^k+\sigma_{pq}^{kc}+\sigma_{pq}^c \tag{2.19}$$

其中，σ_{pq}^k为Kirchhoff项，σ_{pq}^{kc}为交叉项，σ_{pq}^c为补偿项。

单次散射的散射系数为[2]

$$\sigma_{pq}=\frac{k_1^2}{2}\exp[-\delta^2(k_{1z}^2+k_{sz}^2)]\sum_{n=1}^{\infty}\delta^{2n}|I_{pq}^n|^2\frac{W^{(n)}(k_{sx}-k_{1x},k_{sy}-k_{1y})}{n!} \tag{2.20}$$

其中，δ为粗糙面均方根高度，

$$I_{pq}^n=(k_{sz}+k_{1z})^nf_{pq}\exp(-\delta^2k_{1z}k_{sz})+\frac{(k_{sz})^nF_{pq}(-k_{1x},-k_{1y})+(k_{1z})^nF_{pq}(-k_{sx},-k_{sy})}{2} \tag{2.21}$$

式(2.21)仅适用于 $k_1\delta$ 较小或中等程度的情况，如果 $k_1\delta>1.5$，上式等号右边第二项可以忽略，因为上式中的第一项包含一个足够大的增长因子来补偿指数衰减因子，而第二项却没有。因此，对于大的 $k_1\delta$ 仅保留上式中的第一项，其中，

$$f_{VV}=\frac{2R_{VV}}{\cos\theta_i+\cos\theta_s}[\sin\theta_i\sin\theta_s-(1+\cos\theta_i\cos\theta_s)\cos(\phi_s-\phi_i)] \tag{2.22a}$$

$$f_{HH}=-\frac{2R_{HH}}{\cos\theta_i+\cos\theta_s}[\sin\theta_i\sin\theta_s-(1+\cos\theta_i\cos\theta_s)\cos(\phi_s-\phi_i)] \tag{2.22b}$$

$$f_{HV}=2R'\sin(\phi_s-\phi_i) \tag{2.22c}$$

$$f_{VH}=2R'\sin(\phi_i-\phi_s) \tag{2.22d}$$

$$R'=\frac{R_{VV}-R_{HH}}{2} \tag{2.23}$$

$$k_{1x}=k_1\sin\theta_i\cos\phi_i,\quad k_{1y}=k_1\sin\theta_i\sin\phi_i,\quad k_{1z}=k_1\cos\theta_i \tag{2.24}$$

$$k_{sx}=k_1\sin\theta_s\cos\phi_s,\quad k_{sy}=k_1\sin\theta_s\sin\phi_s,\quad k_{sz}=k_1\cos\theta_s \tag{2.25}$$

通常情况下，菲涅耳反射系数为局部入射角的函数，但是对于小粗糙度的情况或者是大介电常数的表面，可以用入射角代替局部入射角。令 $\varepsilon_r=\varepsilon_2/\varepsilon_1$，$\mu_r=\mu_2/\mu_1$，则两种极化情况下的菲涅耳反射系数分别为

$$R_{HH}=\frac{\cos\theta_i-\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i+\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}}\text{（水平极化）} \tag{2.26a}$$

$$R_{VV}=\frac{\varepsilon_r\cos\theta_i-\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}}{\varepsilon_r\cos\theta_i+\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}}\text{（垂直极化）} \tag{2.26b}$$

基于上面的假设，可以将同极化下的补偿场系数写为

$$\begin{aligned}F_{VV}(-k_{1x},-k_{1y})&=\frac{4(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i-\varepsilon_r\cos^2\theta_i)\sin\theta_i[\sin\theta_s-\sin\theta_i\cos(\phi_s-\phi_i)]}{\left[\varepsilon_r\cos\theta_i+\sqrt{\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}\right]^2\cos\theta_s}\\&=\frac{(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i-\varepsilon_r\cos^2\theta_i)(1+R_{VV})^2}{(\varepsilon_r\cos\theta_i)^2\cos\theta_s}\\&\quad\times\sin\theta_i[\sin\theta_s-\sin\theta_i\cos(\phi_s-\phi_i)]\end{aligned} \tag{2.27a}$$

$$\begin{aligned}F_{HH}(-k_{1x},-k_{1y})&=-\frac{4(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i-\mu_r\cos^2\theta_i)\sin\theta_i[\sin\theta_s-\sin\theta_i\cos(\phi_s-\phi_i)]}{\left[\mu_r\cos\theta_i+\sqrt{\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}\right]^2\cos\theta_s}\\&=-\frac{(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i-\mu_r\cos^2\theta_i)(1+R_{HH})^2}{(\mu_r\cos\theta_i)^2\cos\theta_s}\\&\quad\times\sin\theta_i[\sin\theta_s-\sin\theta_i\cos(\phi_s-\phi_i)]\end{aligned} \tag{2.27b}$$

交叉极化下的补偿场系数写为

$$\begin{aligned}F_{HV}(-k_{1x},-k_{1y})=&\left\{\frac{(\varepsilon_r T)\cos\theta_i\cos\theta_s(\varepsilon_r T-\sin^2\theta_i)-(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)}{T\varepsilon_r\cos\theta_s(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)^{1/2}}\right.\\&\left.+\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_s}-1+T\sin^2\theta_i\right\}(1-R'^2)\sin(\phi_s-\phi_i)\end{aligned} \tag{2.27c}$$

$$F_{\mathrm{VH}}(-k_{1x},-k_{1y})=\Big[\frac{\mu_r\cos\theta_i\cos\theta_s(\mu_r-T\sin^2\theta_i)-T^2(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)}{T\mu_r\cos\theta_s(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)^{1/2}}+\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_s}-1+\frac{\sin^2\theta_i}{T}\Big](1-R'^2)\sin(\phi_s-\phi_i) \tag{2.27d}$$

其中，

$$T=\frac{f(\theta_i)[\mu_r\cos\theta_i+f(\theta_i)]+\mu_r\cos\theta_i[\varepsilon_r\cos\theta_i+f(\theta_i)]}{\varepsilon_r\cos\theta_i[\mu_r\cos\theta_i+f(\theta_i)]+f(\theta_i)[\mu_r\cos\theta_i+f(\theta_i)]} \tag{2.28}$$

$$f(\theta_i)=(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)^{1/2} \tag{2.29}$$

对于系数 $F_{pq}(-k_{sx},-k_{sy})$ 可以表示为

$$F_{\mathrm{VV}}(-k_{sx},-k_{sy})=-\left(\mathrm{css}T_{vm}-\frac{\mathrm{sqs}T_v}{\varepsilon_r}\right)(T_v\mathrm{csf}+T_{vm}\varepsilon_r c_{1s})+\left(T_v^2-\frac{T_vT_{vm}\mathrm{css}}{\mathrm{sqs}}\right)c_{2s} \tag{2.30a}$$

$$F_{\mathrm{HH}}(-k_{sx},-k_{sy})=\left(\mathrm{css}T_{hm}-\frac{\mathrm{sqs}T_h}{\mu_r}\right)(T_h\mathrm{csf}+T_{hm}\mu_r c_{1s})-\left(T_h^2-\frac{T_hT_{hm}\mathrm{css}}{\mathrm{sqs}}\right)c_{2s} \tag{2.30b}$$

$$F_{\mathrm{HV}}(-k_{sx},-k_{sy})=-\left(\mathrm{css}T_p-\frac{\mathrm{sqs}T_m}{\mu_r}\right)\left(\frac{T_m}{\mathrm{cs}}+\frac{T_p\mu_r}{\mathrm{sqs}}\right)\mathrm{sf}-\left(T_m^2-\frac{T_pT_m\mathrm{css}}{\mathrm{sqs}}\right)\mathrm{ss}^2\mathrm{sf} \tag{2.30c}$$

$$F_{\mathrm{VH}}(-k_{sx},-k_{sy})=-\left(\mathrm{css}T_m-\frac{\mathrm{sqs}T_p}{\varepsilon_r}\right)\left(\frac{T_p}{\mathrm{cs}}+\frac{T_m\varepsilon_r}{\mathrm{sqs}}\right)\mathrm{sf}-\left(T_p^2-\frac{T_pT_m\mathrm{css}}{\mathrm{sqs}}\right)\mathrm{ss}^2\mathrm{sf} \tag{2.30d}$$

其中，

$$\begin{gathered}
\mathrm{s}=\sin\theta_i,\quad \mathrm{ss}=\sin\theta_s,\quad \mathrm{cs}=\cos\theta_i,\quad \mathrm{css}=\cos\theta_s\\
\mathrm{sf}=\sin(\phi_s-\phi_i),\quad \mathrm{csf}=\cos(\phi_s-\phi_i)\\
\mathrm{sq}=(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)^{1/2},\quad \mathrm{sqs}=(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_s)^{1/2}\\
c_{1s}=\frac{\mathrm{csf}-\mathrm{s}\cdot\mathrm{ss}}{\mathrm{sqs}\cdot\mathrm{cs}},\quad c_{2s}=\frac{\mathrm{ss}(\mathrm{s}-\mathrm{ss}\cdot\mathrm{csf})}{\mathrm{cs}}\\
T_v=1+R_{\mathrm{VV}},\quad T_{vm}=1-R_{\mathrm{VV}},\quad T_h=1+R_{\mathrm{HH}}\\
T_{hm}=1-R_{\mathrm{HH}},\quad T_p=1+R',\quad T_m=1-R'
\end{gathered} \tag{2.31}$$

对于后向散射的情况，可以得到基于 IEM 的后向散射系数为[2]

$$\sigma_{pp}=\frac{k_1^2}{4\pi}\exp[-2k_1^2\delta^2\cos^2\theta_i]\sum_{n=1}^{\infty}|I_{pp}^n|^2\frac{W^{(n)}(2k_1\sin\theta_i,0)}{n!} \tag{2.32}$$

其中，下角标 p 表示水平(H)或垂直极化方式(V)，

$$I_{pp}^n=(2k_1\delta\cos\theta_i)^n f_{pp}\exp[-k_1^2\delta^2\cos^2\theta_i]+(k_1\delta\cos\theta_i)^nF_{pp} \tag{2.33}$$

$$f_{\mathrm{VV}}=\frac{2R_{\mathrm{VV}}}{\cos\theta_i} \tag{2.34a}$$

$$f_{\mathrm{HH}}=\frac{-2R_{\mathrm{HH}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}} \tag{2.34b}$$

$$F_{\mathrm{VV}}=\left(\frac{\sin^2\theta_{\mathrm{i}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}}-\frac{\mathrm{sq}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)T_v^2-2\sin^2\theta_{\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\cos\theta_{\mathrm{i}}}+\frac{1}{\mathrm{sq}}\right)T_vT_{vm}+\left(\frac{\sin^2\theta_{\mathrm{i}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}}+\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}(1+\sin^2\theta_{\mathrm{i}})}{\mathrm{sq}}\right)T_{vm}^2 \tag{2.35a}$$

$$F_{\mathrm{HH}}=-\left[\left(\frac{\sin^2\theta_{\mathrm{i}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}}-\frac{\mathrm{sq}}{\mu_{\mathrm{r}}}\right)T_h^2-2\sin^2\theta_{\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\cos\theta_{\mathrm{i}}}+\frac{1}{\mathrm{sq}}\right)T_hT_{hm}+\left(\frac{\sin^2\theta_{\mathrm{i}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}}+\frac{\mu_{\mathrm{r}}(1+\sin^2\theta_{\mathrm{i}})}{\mathrm{sq}}\right)T_{hm}^2\right] \tag{2.35b}$$

其中，$W^{(n)}$是表面功率谱，对应于粗糙面的相关函数$\rho(x,y)$的n次方$\rho^n(x,y)$的二维 Fourier 变换。定义其在极坐标系下的形式为

$$W^{(n)}(k,\varphi)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\rho^n(r,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\varphi-\phi)}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \tag{2.36}$$

如果表面粗糙度与入射方向无关，则粗糙面的相关函数仅是r的函数，式(2.36)可简化为

$$W^{(n)}(k)=2\pi\int_0^{\infty}\rho^n(r)J_0(kr)r\mathrm{d}r \tag{2.37}$$

其中，$J_0(kr)$是第一类零阶 Bessel 函数，I_{pp}^n的第一项是 Kirchhoff 项，第二项是补偿项。

2.1.3 数值结果及其分析

下面采用积分方程方法计算具有指数谱分布粗糙面的散射系数，其中，粗糙面上方为自由空间，下方相对介电常数为(15.34,3.66)，均方根高度$\delta=0.004\mathrm{m}$，相关长度$l=0.084\mathrm{m}$。图 2.2 给出了不同入射频率下的粗糙面后向散射系数随入射角的变化曲线，并与测量数据[3]进行了比较，其中，入射波频率f分别为 1.5GHz 和 4.75GHz。从图中可以看出，无论何种极化状态，小入射角下的后向散射系数的计算结果与测量数据吻合得较好，随着入射角的增大，计算结果和测量数据差异变大。同时还可以发现与 HH 极化结果相比，VV 极化下的计算结果与测量数据吻合更好。

图 2.3 和 2.4 分别给出后向散射系数随均方根高度δ和相关长度l的变化情况。从图中可以看出，无论入射角大小，后向散射系数均随着均方根高度的增大而增大，随相关长度的增大而减小。

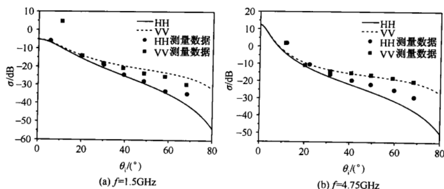


图 2.2　不同入射频率下后向散射系数随入射角的变化

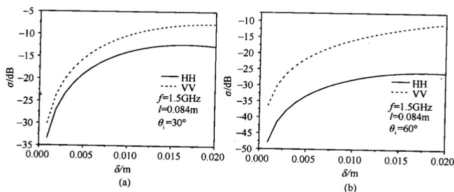


图 2.3　后向散射系数随均方根高度的变化

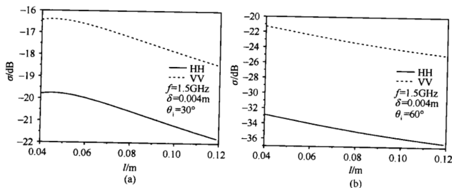


图 2.4　后向散射系数随相关长度的变化

2.2 Kirchhoff 近似方法

Stratton-Chu 积分方程(2.4)表明为获得散射场,关键是如何求解粗糙面上的切向场 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}$。Kirchhoff 近似采用的是切平面近似,即界面上任意一点的场强由该点处的切平面反射波决定,下面据此来给出切向场。

2.2.1 求解切向场 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}$

为了求得界面处的切向场,取本地坐标系更为方便。假设入射波形如式(2.1),用下面单位矢量来定义本地基准坐标系:

$$\hat{\boldsymbol{t}}=\frac{\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}}\times\hat{\boldsymbol{n}}}{|\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}}\times\hat{\boldsymbol{n}}|}$$

$$\hat{\boldsymbol{d}}=\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}}\times\hat{\boldsymbol{t}}$$

$$\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{t}}\times\hat{\boldsymbol{d}} \tag{2.38}$$

入射波可以分解为水平和垂直两个分量,即

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{i}}=(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{t}})\hat{\boldsymbol{t}}E_0 \tag{2.39a}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{i}}=\frac{\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}}\times[(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{t}})\hat{\boldsymbol{t}}E_0]}{\eta_1}=\frac{(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{t}})\hat{\boldsymbol{d}}E_0}{\eta_1} \tag{2.39b}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{i}}=(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{d}})\hat{\boldsymbol{d}}E_0 \tag{2.39c}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{i}}=\frac{(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{d}})\hat{\boldsymbol{t}}E_0}{\eta_1} \tag{2.39d}$$

在切平面近似条件下,可假设粗糙面上某一点的总场强等于入射场加上与该点相切的无限大平面的反射场。因此,切向水平极化场可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{i}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{r}})=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{i}}(1+R_{\mathrm{HH}}) \tag{2.40a}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{H}}&=\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{i}}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{r}})=\frac{\hat{\boldsymbol{n}}\times(\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{i}}+\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{r}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{i}}R_{\mathrm{HH}})}{\eta_1}\\&=-\frac{[(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}})\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{i}}+(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{r}})\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{i}}R_{\mathrm{HH}}]}{\eta_1}=-\frac{(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}})(1-R_{\mathrm{HH}})\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{i}}}{\eta_1}\end{aligned} \tag{2.40b}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{r}}$ 为反射场方向的单位矢量,$\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{r}}$ 为反射电场的水平极化场,$\boldsymbol{H}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{r}}$ 为反射磁场的水平极化场。对于磁场也有类似的讨论。同理可以得到切向垂直极化场

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{V}}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{i}}(1+R_{\mathrm{VV}}) \tag{2.41a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}=\eta_1(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{t}})\boldsymbol{H}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{i}}(1-R_{\mathrm{VV}}) \tag{2.41b}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{t}}$ 为透射方向的单位矢量。将水平和垂直的电场和磁场求和,得到下面总的切向电磁场为:

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}=[(1+R_{\mathrm{HH}})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{t}})(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{t}})-(1-R_{\mathrm{VV}})(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{d}})\hat{\boldsymbol{t}}]E_0 \tag{2.42a}$$

$$\eta_1\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}=-[(1-R_{\mathrm{HH}})(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{t}})\hat{\boldsymbol{t}}+(1+R_{\mathrm{VV}})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{d}})(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{t}})]E_0 \tag{2.42b}$$

将式(2.42)代入式(2.4)可以得到散射场的表达式为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})=K\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\times\int[(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E})-\eta_1\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\times(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H})]\exp(-\mathrm{i}k_1(\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}-\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}})\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}s' \tag{2.43}$$

式(2.43)是利用 Kirchhoff 近似推导出的散射场表达式，该式是面函数及其偏导数的复合函数，如不加简化假设仍得不到解析解。因此，为求解此积分，仍要作进一步的近似，根据近似方法的不同，又分为驻留相位法和标量近似法。驻留相位法适用于表面高度起伏均方根较大的粗糙面，即适用于大粗糙度表面。它通过稳定相位法求解积分方程得到散射场，然后由单位面积稳定点的平均数以及每一点的平均贡献求出散射场的均方值，进而获得平均散射功率；标量近似法适用于表面高度起伏均方根中等或较小的粗糙面，即适用于小粗糙度表面。Kirchhoff 近似要求相关长度 l 必须大于波长，并且垂直方向上粗糙面均方根高度 δ 必须足够小，上述限制的数学表达式为 $k_1l>6$，$l^2>2.76\delta\lambda$。下面分别对这两种方法作讨论。

2.2.2　驻留相位法

采用驻留相位法，入射波只能沿表面上存在镜面点的方向上发生散射，因而忽略了绕射效应，式(2.43)中的相位因子可写为

$$Q=k_1(\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}-\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}})\cdot\boldsymbol{r}'=q_xx'+q_yy'+q_zz' \tag{2.44}$$

其中，

$$\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_{\mathrm{s}}\cos\phi_{\mathrm{s}}+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta_{\mathrm{s}}\sin\phi_{\mathrm{s}}+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_{\mathrm{s}} \tag{2.45a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_{\mathrm{i}}\cos\phi_{\mathrm{i}}+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta_{\mathrm{i}}\sin\phi_{\mathrm{i}}-\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_{\mathrm{i}} \tag{2.45b}$$

$$q_x=k_1(\sin\theta_{\mathrm{s}}\cos\phi_{\mathrm{s}}-\sin\theta_{\mathrm{i}}\cos\phi_{\mathrm{i}}) \tag{2.45c}$$

$$q_y=k_1(\sin\theta_{\mathrm{s}}\sin\phi_{\mathrm{s}}-\sin\theta_{\mathrm{i}}\sin\phi_{\mathrm{i}}) \tag{2.45d}$$

$$q_z=k_1(\cos\theta_{\mathrm{s}}+\cos\theta_{\mathrm{i}}) \tag{2.45e}$$

若某点处 Q 的变化率为零，那么该点的相位认为是稳定的，即

$$\frac{\partial Q}{\partial x'}=0=q_x+q_z\frac{\partial z'}{\partial x'} \tag{2.46a}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y'}=0=q_y+q_z\frac{\partial z'}{\partial y'} \tag{2.46b}$$

此时，表面斜率的偏导数可以用相位分量来代替

$$\frac{\partial z'}{\partial x'}=-\frac{q_x}{q_z},\quad\frac{\partial z'}{\partial y'}=-\frac{q_y}{q_z} \tag{2.47}$$

由此，在驻留相位条件下，散射场可以重新写为

$$\boldsymbol{E}^{s}=K\hat{\boldsymbol{k}}_{s}\times[(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E})-\eta_{1}\hat{\boldsymbol{k}}_{s}\times(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H})]I_{1}\tag{2.48}$$

其中，

$$I_{1}=\int\exp(-\mathrm{i}k_{1}(\hat{\boldsymbol{k}}_{s}-\hat{\boldsymbol{k}}_{i})\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}s'\tag{2.49}$$

令$\hat{\boldsymbol{v}}_{i}$和$\hat{\boldsymbol{h}}_{i}$分别为垂直和水平极化入射波的单位极化矢量。令$\hat{\boldsymbol{v}}_{s}$和$\hat{\boldsymbol{h}}_{s}$分别为散射波的相应单位极化矢量，并选择$\hat{\boldsymbol{v}}_{s}$和$\hat{\boldsymbol{h}}_{s}$，使之与标准球坐标系中的$\hat{\boldsymbol{\theta}}$和$\hat{\boldsymbol{\phi}}$相一致。因此

$$\hat{\boldsymbol{h}}_{s}=\hat{\boldsymbol{\phi}}=-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi_{s}+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi_{s}\tag{2.50a}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{s}=\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{h}}_{s}\times\hat{\boldsymbol{k}}_{s}=\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_{s}\cos\phi_{s}+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta_{s}\sin\phi_{s}-\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_{s}\tag{2.50b}$$

$$\hat{\boldsymbol{h}}_{i}=-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi_{i}+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi_{i}\tag{2.50c}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{i}=\hat{\boldsymbol{h}}_{i}\times\hat{\boldsymbol{k}}_{i}=-\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_{i}\cos\phi_{i}+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta_{i}\sin\phi_{i}+\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_{i}\tag{2.50d}$$

当入射波为水平极化时，将式(2.42)、式(2.43)中的$\hat{\boldsymbol{p}}$换为$\hat{\boldsymbol{h}}$，因而同极化散射场和交叉极化散射场可以分别表示为

$$E_{HH}^{s}=\hat{\boldsymbol{h}}_{s}\cdot\boldsymbol{E}^{s}=M_{1}[R_{VV}(\hat{\boldsymbol{h}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{s})(\hat{\boldsymbol{h}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{i})+R_{HH}(\hat{\boldsymbol{v}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{s})(\hat{\boldsymbol{v}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{i})]=KI_{1}E_{0}U_{HH}\tag{2.51}$$

$$E_{VH}^{s}=\hat{\boldsymbol{v}}_{s}\cdot\boldsymbol{E}^{s}=M_{1}[R_{VV}(\hat{\boldsymbol{h}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{s})(\hat{\boldsymbol{v}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{i})-R_{HH}(\hat{\boldsymbol{v}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{s})(\hat{\boldsymbol{h}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{i})]=KI_{1}E_{0}U_{VH}\tag{2.52}$$

其中，M_1的推导可参见文献[1]附录12A。当入射波为垂直极化波时，将$\hat{\boldsymbol{h}}_{i}$和$\hat{\boldsymbol{v}}_{i}$，$\hat{\boldsymbol{h}}_{s}$和$\hat{\boldsymbol{v}}_{s}$互换后，就可以从式(2.51)、式(2.52)得到相应的同极化散射场和交叉极化散射场分别为

$$E_{VV}^{s}=M_{1}[R_{VV}(\hat{\boldsymbol{v}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{t})(\hat{\boldsymbol{v}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{s})+R_{HH}(\hat{\boldsymbol{h}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{t})(\hat{\boldsymbol{h}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{s})]=KI_{1}E_{0}U_{VV}\tag{2.53}$$

$$E_{HV}^{s}=M_{1}[R_{VV}(\hat{\boldsymbol{h}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{t})(\hat{\boldsymbol{v}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{s})-R_{HH}(\hat{\boldsymbol{v}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{t})(\hat{\boldsymbol{h}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_{s})]=KI_{1}E_{0}U_{HV}\tag{2.54}$$

其中，

$$U_{HH}=\frac{\sqrt{2[1-(\hat{\boldsymbol{n}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{i})]}\,|q_{z}|[R_{VV}(\hat{\boldsymbol{h}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{i})(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{s})+R_{HH}(\hat{\boldsymbol{v}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{i})(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{s})]}{[((\hat{\boldsymbol{n}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}_{s})^{2}+(\hat{\boldsymbol{n}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}_{s})^{2})q_{z}]}\tag{2.55a}$$

$$U_{VV}=\frac{\sqrt{2[1-(\hat{\boldsymbol{n}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{i})]}\,|q_{z}|[R_{VV}(\hat{\boldsymbol{v}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{i})(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{s})+R_{HH}(\hat{\boldsymbol{h}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{i})(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{s})]}{[((\hat{\boldsymbol{n}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}_{s})^{2}+(\hat{\boldsymbol{n}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}_{s})^{2})q_{z}]}\tag{2.55b}$$

$$U_{HV}=\frac{\sqrt{2[1-(\hat{\boldsymbol{n}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{i})]}\,|q_{z}|[R_{VV}(\hat{\boldsymbol{h}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{i})(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{s})-R_{HH}(\hat{\boldsymbol{v}}_{s}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{i})(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{s})]}{[((\hat{\boldsymbol{n}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}_{s})^{2}+(\hat{\boldsymbol{n}}_{i}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}_{s})^{2})q_{z}]}\tag{2.55c}$$

$$U_{\mathrm{VH}}=\frac{\sqrt{2[1-(\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{s}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{i}})]}\,|q_z|[R_{\mathrm{VV}}(\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{i}})(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{s}})-R_{\mathrm{HH}}(\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{i}})(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{s}})]}{[((\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}})^2+(\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}})^2)q_z]} \tag{2.55d}$$

根据式(2.18)，为了求得散射系数，首先需要求出散射功率

$$\langle E_{pq}^{s}\cdot E_{pq}^{s\,*}\rangle=|KE_0U_{pq}|^2\langle|I_1|^2\rangle=\frac{|k_1E_0U_{pq}|^2}{(4\pi R)^2}\langle|I_1|^2\rangle \tag{2.56}$$

因此，求解散射系数转化为求解$\langle|I_1|^2\rangle$，对于表面高度起伏满足高斯分布的随机粗糙面，$\langle|I_1|^2\rangle$可以表示为

$$\langle|I_1|^2\rangle=\iint\langle\exp(-\mathrm{i}k_1(\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}-\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}})\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}''))\rangle\mathrm{d}s'\mathrm{d}s'' \tag{2.57}$$

直角坐标系下 $\mathrm{d}s'=q\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'/|q_z|$，因此

$$\langle|I_1|^2\rangle=\frac{q^2}{q_z^2}\iiiint\exp[-\mathrm{i}q_x(x'-x'')-\mathrm{i}q_y(y'-y'')]\times\langle\exp\{-\mathrm{i}q_z[z(x',y')-z(x'',y'')]\}\rangle\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}x''\mathrm{d}y'' \tag{2.58}$$

假设$z(x,y)$是平稳高斯随机过程，其平均值为零，高度起伏方差为δ^2，相关函数是ρ，则特征函数为

$$\langle\exp\{-\mathrm{i}q_z[z(x',y')-z(x'',y'')]\}\rangle=\exp[-q_z^2\delta^2(1-\rho)] \tag{2.59}$$

对于平稳过程来说，相关函数仅取决于变量差，令 $u=x'-x''$，$v=y'-y''$，并且假设照射面积为 $2L\times2L$，使用变量替换，式(2.58)可以表示为

$$\langle|I_1|^2\rangle=\frac{q^2}{|q_z|^2}\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}\int_{-L-x''}^{L-x''}\int_{-L-y''}^{L-y''}\exp[-\mathrm{i}q_xu-\mathrm{i}q_yv-q_z^2\delta^2(1-\rho)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}x''\mathrm{d}y'' \tag{2.60}$$

互换积分顺序可得

$$\langle|I_1|^2\rangle=\frac{q^2}{|q_z|^2}\int_{-2L}^{2L}\int_{-2L}^{2L}(2L-|u|)(2L-|v|)\exp[-\mathrm{i}q_xu-\mathrm{i}q_yv-q_z^2\delta^2(1-\rho)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{2.61}$$

最终得到如下的积分结果：

$$\langle|I_1|^2\rangle=\frac{2\pi A_0q^2}{|q_z|^4\delta^2|\rho''(0)|}\exp\left[-\frac{(q_x^2+q_y^2)}{2q_z^2\delta^2|\rho''(0)|}\right] \tag{2.62}$$

将式(2.56)和式(2.62)代入到散射系数定义式中，可得到如下的双站散射系数：

$$\sigma_{pq}=\frac{(k_1q|U_{pq}|)^2}{2|q_z|^4\delta^2|\rho''(0)|}\exp\left[-\frac{(q_x^2+q_y^2)}{2q_z^2\delta^2|\rho''(0)|}\right] \tag{2.63}$$

图 2.5 运用驻留相位法计算了文献[4]中海面模型的后向散射系数随入射角的变化，其中，$s=\sqrt{\delta^2|\rho''(0)|}$为表面均方根斜率，图 2.5(a)的风速 U 为 14～16 节（节：风速单位），该风速下的粗糙度参数为 $s=0.1$，$k\delta=0.13$，$kl=0.2$；图 2.5(b)

的风速 U 为 23～26 节，相对应的粗糙度参数为 $s=0.12, k\delta=0.173, kl=0.2$。通过比较可知图 2.5 与文献[4]中海面后向散射系数角分布是完全吻合的。

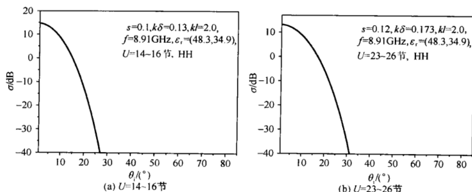


图 2.5　海面后向散射系数随入射角的变化

2.2.3　标量近似法

标量近似法讨论的是小粗糙度情况，基于如下两点假设：①在本地坐标系中单位矢量($\hat{t}$,$\hat{d}$)中的斜率项均可忽略；②本地表面的单位法矢 $\hat{n}=-\hat{x}z_x-\hat{y}z_y+\hat{z}$，其中，$z_x$，$z_y$ 表示 x 与 y 方向的表面斜率。这些假设是以 Kirchhoff 近似得到的标量公式作为依据，而不是以任何数学原理为基础的，因此，称之为标量近似法。它提供了数学上的简化，同时保留了极化散射中的所有主要项。在这种近似方法下，基本的散射场表达式可以表示为

$$E_{pq}^{s}=KE_0\int\bar{U}_{pq}EX\mathrm{d}s' \tag{2.64}$$

其中，$EX=\exp[-\mathrm{i}k_1(\hat{\boldsymbol{k}}_s-\hat{\boldsymbol{k}}_i)\cdot\boldsymbol{r}']$，$\bar{U}_{pq}$的表达式详见文献[1]附录 12C。为了求得$\langle\boldsymbol{E}^s\cdot\boldsymbol{E}^{s*}\rangle$以计算散射系数，需要计算出积分的集平均值，如下：

$$I=\iint\langle\bar{U}_{pq}\bar{U}_{pq}^{*}\exp[-\mathrm{i}k_1(\hat{\boldsymbol{k}}_s-\hat{\boldsymbol{k}}_i)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\rangle\mathrm{d}s\mathrm{d}s' \tag{2.65}$$

其中，$\bar{U}_{pq}$值具有如下表达式：

$$\bar{U}_{pq}=a_0+a_1Z_x+a_2Z_y \tag{2.66}$$

$a_i(i=0,1,2)$为与极化有关的系数，称为极化系数。对 $\bar{U}_{pq}\bar{U}_{pq}^{*}$进行一阶斜率近似有

$$\bar{U}_{pq}\bar{U}_{pq}^{*}\simeq a_0a_0^{*}+a_0a_1^{*}Z_x'+a_0^{*}a_1Z_x+a_0a_2^{*}Z_y'+a_0^{*}a_2Z_y \tag{2.67}$$

式(2.67)中第一项的积分类似于 2.2.2 小节中的$\langle|I_1|^2\rangle$积分。因此，可以得到第一项的集平均为

$$I_0=|a_0|^2\int_{-2L}^{2L}\int_{-2L}^{2L}(2L-|u|)(2L-|v|)\exp[-\mathrm{i}q_xu-\mathrm{i}q_yv-q_z^2\delta^2(1-\rho)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{2.68}$$

由于 $q_z^2\delta^2$ 是小量，因此有关系式

$$\exp(q_z^2\delta^2\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q_z^2\delta^2\rho)^n}{n!} \tag{2.69}$$

因此，式(2.68)可以表达为

$$I_0=|a_0|^2\exp(-q_z^2\delta^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q_z^2\delta^2\rho)^n}{n!}\int_{-2L}^{2L}\int_{-2L}^{2L}(2L-|u|)(2L-|v|)\times\exp(-\mathrm{i}q_xu-\mathrm{i}q_yv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{2.70}$$

式(2.70)中，$n=0$ 代表相干散射效应，因此，相干散射系数可以表示为[1]

$$\sigma_{\mathrm{pqc}}=\pi k_1^2|a_0|^2\exp(-q_z^2\delta^2)\Lambda(q_x)\Lambda(q_y) \tag{2.71}$$

其中，Λ 为狄拉克函数。当 $n\geqslant1$ 时，可以将式(2.70)化为

$$I_0=|a_0|^2A_0\exp(-q_z^2\delta^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q_z^2\delta^2)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\int\rho^n\exp(-\mathrm{i}q_xu-\mathrm{i}q_yv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{2.72}$$

对于各向同性高斯粗糙面有 $\rho=\exp(-\xi^2/l^2)$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\exp\left(\frac{-n\xi^2}{l^2}\right)\exp(-\mathrm{i}q_xu-\mathrm{i}q_yv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi l^2}{n}\exp\left[-\frac{(q_x^2+q_y^2)l^2}{4n}\right] \tag{2.73}$$

因此，相应的非相干散射系数为[1]

$$\sigma_{\mathrm{pqi}}=(|a_0|(k_1l)/2)^2\exp(-q_z^2\delta^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q_z^2\delta^2)^n}{n!n}\exp\left[-\frac{(q_x^2+q_y^2)l^2}{4n}\right] \tag{2.74}$$

考虑到斜率不为零的情况，采用类似的方法可以得到表面斜率对散射系数的贡献为[1]

$$\sigma_{\mathrm{pqs}}=-\frac{q_z}{2}(k_1\delta l)^2\mathrm{Re}\{a_0(q_xa_1^*+q_ya_2^*)\}\exp(-q_z^2\delta^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q_z^2\delta^2)^{n-1}}{n!n}\exp\left[-\frac{(q_x^2+q_y^2)l^2}{4n}\right] \tag{2.75}$$

总的双站散射系数可以表示为

$$\sigma_{\mathrm{pq}}=\sigma_{\mathrm{pqc}}+\sigma_{\mathrm{pqi}}+\sigma_{\mathrm{pqs}} \tag{2.76}$$

其中，不同极化状态下的极化系数的具体表达式为

HH 场

$$a_0=-R_{\mathrm{HH}}(\cos\theta_{\mathrm{i}}+\cos\theta_{\mathrm{s}})\cos(\phi_{\mathrm{s}}-\phi_{\mathrm{i}}) \tag{2.77a}$$

$$a_1=a\cos\phi_{\mathrm{i}} \tag{2.77b}$$

$$a_2=a\sin\phi_{\mathrm{i}} \tag{2.77c}$$

$$a=R_{\mathrm{HH}}[\sin\theta_{\mathrm{s}}-\sin\theta_{\mathrm{i}}\cos(\phi_{\mathrm{s}}-\phi_{\mathrm{i}})]-R_{\mathrm{HH1}}(\cos\theta_{\mathrm{s}}+\cos\theta_{\mathrm{i}})\cos(\phi_{\mathrm{s}}-\phi_{\mathrm{i}}) \tag{2.77d}$$

VV 场

$$a_0 = R_{VV}(\cos\theta_i + \cos\theta_s)\cos(\phi_s - \phi_i) \tag{2.78a}$$

$$a_1 = a\cos\phi_i \tag{2.78b}$$

$$a_2 = a\sin\phi_i \tag{2.78c}$$

$$a = R_{VV1}(\cos\theta_i + \cos\theta_s)\cos(\phi_s - \phi_i) - R_{VV}[\sin\theta_s - \sin\theta_i\cos(\phi_s - \phi_i)] \tag{2.78d}$$

VH 场

$$a_0 = -R_{HH}(1 + \cos\theta_i\cos\theta_s)\sin(\phi_s - \phi_i) \tag{2.79a}$$

$$a_1 = a\cos\phi_i \tag{2.79b}$$

$$a_2 = a\sin\phi_i \tag{2.79c}$$

$$a = [-R_{HH}\sin\theta_i\cos\theta_s - R_{HH1}(1 + \cos\theta_i\cos\theta_s)]\sin(\phi_s - \phi_i) \tag{2.79d}$$

HV 场的系数与 VH 场的系数相同,只需将式中的 R_{HH} 和 R_{HH1} 分别用 R_{VV} 和 R_{VV1} 来代替,其中,R_{HH1} 和 R_{VV1} 分别为

$$R_{HH1} = -R_{HH}\frac{2\sin\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta_i}} \tag{2.80a}$$

$$R_{VV1} = \frac{R_{VV}(\varepsilon_r\sin\theta_i + \sin\theta_i) + \sin\theta_i - \varepsilon_r\sin\theta_i}{\varepsilon_r\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta_i}} \tag{2.80b}$$

在后向散射情况下,其中,$\theta_i = \theta_s$,$\phi_s = \pi$,$\phi_i = 0$,因此,式(2.74)和式(2.75)分别退化为

$$\sigma_{pqi} = (|R_{pp}|k_1 l\cos\theta_i)^2\exp(-K_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_0^n}{n!n}\exp\left[-\frac{(k_1 l\sin\theta_i)^2}{n}\right] \tag{2.81}$$

$$\sigma_{pqs} = 8\sin\theta_i(k_1^2\delta l\cos\theta_i)^2\exp(-K_0)[|R_{pp}|^2\sin\theta_i + \mathrm{Re}\{R_{pp}R_{pp1}^*\}\cos\theta_i] \times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_0^{n-1}}{n!n}\exp\left[-\frac{(k_1 l\sin\theta_i)^2}{n}\right] \tag{2.82}$$

其中,$K_0 = 4k_1^2\delta^2\cos^2\theta_i$。

2.2.4 数值结果及其分析

图 2.6 以高斯粗糙面为例,根据式(2.76)得到标量近似下的双站散射系数(忽略斜率项对散射系数的贡献),其中,粗糙面上方为自由空间,下方介质的相对介电常数为(20.0,0.3),入射波频率 $f = 3\text{GHz}$,其余参数如图所示。从图中可以看出无论何种极化方式,散射系数的峰值均出现在镜反射方向,尖峰的出现是因为考虑了相干分量,均方根高度越小,粗糙面越平滑,相干分量越明显。除镜反射方向及其附近的散射方向外,随着均方根高度的增大,双站散射系数的幅值有所增大。

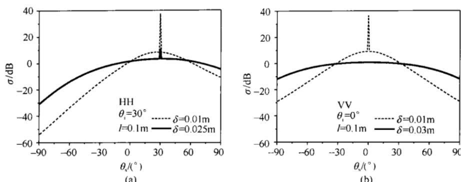


图 2.6　高斯粗糙面双站散射系数角分布

2.3　微　扰　法

Kirchhoff 方法适用的粗糙面，其平均曲率半径均要求大于一个电磁波波长。当粗糙面均方根高度和相关长度两者均小于入射波长时，必须采用微扰法。微扰法要求粗糙面均方根高度小于入射电磁波波长的 5%左右。需要强调的是，这里粗糙面的均方根高度指的仅是在给定电磁波波长下引起散射的那些表面频率成分的计算合成，否则如果将所有粗糙面的频率成分都包含在计算的均方根高度中时，肯定会得到显著不同的结果。此外，表面平均斜率应该与波数和粗糙面均方根高度之积处于同一数量级。这两个条件的数学表达式为

$$k_1\delta < 0.3 \tag{2.83a}$$

$$\frac{\sqrt{2}\delta}{l} < 0.3 \tag{2.83b}$$

2.3.1　散射问题公式

假定有一水平极化平面波入射到微粗糙面上，如图 2.1 所示，用 $z(x,y)$来描述粗糙表面轮廓，对其进行 Fourier 变换有

$$z(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} Z(k_{1x},k_{1y})\exp(\mathrm{i}k_{1x}x + \mathrm{i}k_{1y}y)\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} \tag{2.84a}$$

$$Z(k_{1x},k_{1y}) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} z(x,y)\exp(-\mathrm{i}k_{1x}x - \mathrm{i}k_{1y}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.84b}$$

粗糙面上半空间中的散射场可用多个振幅未知的平面波叠加来表示，即

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} U_x(k_{1x},k_{1y})f\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} \tag{2.85a}$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} U_y(k_{1x},k_{1y})f\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} + \exp(\mathrm{i}k_1 x\sin\theta_\mathrm{i})$$

$$\times [\exp(-\mathrm{i}k_1 z\cos\theta_i) + R_{HH}\exp(\mathrm{i}k_1 z\cos\theta_i)] \tag{2.85b}$$

$$E_z = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} U_z(k_{1x}, k_{1y}) f \mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} \tag{2.85c}$$

其中，$f=\exp(-\mathrm{i}k_{1x}x-\mathrm{i}k_{1y}y-\mathrm{i}k_{1z}z)$。式(2.85)提供了求解散射问题的一般公式，其中，场强的幅值是待求量。

2.3.2 场强幅值的确定

场强的幅值可以通过边界条件和散度关系式来求解。电场和磁场的边界条件分别表示为

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}') = \hat{\boldsymbol{n}} \times \Delta\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.86a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}') = \hat{\boldsymbol{n}} \times \Delta\boldsymbol{H} = 0 \tag{2.86b}$$

或

$$\Delta E_y + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta E_z = 0 \tag{2.87a}$$

$$\Delta E_x + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta E_z = 0 \tag{2.87b}$$

以及

$$\frac{\partial \Delta E'_x}{\partial z} - \frac{\partial \Delta E'_z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial \Delta E'_y}{\partial x} - \frac{\partial \Delta E'_x}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.88a}$$

$$\frac{\partial \Delta E'_z}{\partial y} - \frac{\partial \Delta E'_y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial \Delta E'_y}{\partial x} - \frac{\partial \Delta E'_x}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.88b}$$

其中，

$$\Delta E'_x = E_x - \frac{E'_x}{\mu_r} \tag{2.89a}$$

$$\Delta E'_y = E_y - \frac{E'_y}{\mu_r} \tag{2.89b}$$

$$\Delta E'_z = E_z - \frac{E'_z}{\mu_r} \tag{2.89c}$$

把场方程代入$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=0$中得

$$k_{1z}U_z = k_{1x}U_x + k_{1y}U_y \tag{2.90a}$$

$$k_{2z}D_z = -(k_{2x}D_x + k_{2y}D_y) \tag{2.90b}$$

由式(2.87)～式(2.90)能解出6个未知量D_x, D_y, D_z和U_x, U_y, U_z。为了引用边界条件，场强计算应该在$z=z(x,y)$上进行。假设$k_1 z$是小量，所有包含$k_1 z$的指数项均可展开成泰勒级数。此外，将场强幅度展开成扰动级数，如$U_x=U_{x1}+U_{x2}+U_{x3}+\cdots$，采用二阶近似可以得到分界面处的场分别为

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}(U_{x1}+U_{x2}+\cdots)(1+\mathrm{i}k_{1z}z-\cdots)\exp(-\mathrm{i}k_{1x}x-\mathrm{i}k_{1y}y)\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} \tag{2.91a}$$

$$E'_x = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}(D_{x1} + D_{x2} + \cdots)(1 + \mathrm{i}k_{2z}z - \cdots)\exp(-\mathrm{i}k_{1x}x - \mathrm{i}k_{1y}y)\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} \tag{2.91b}$$

因此

$$\Delta E_x = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}[U_{x1} - D_{x1} + U_{x2} - D_{x2} + \mathrm{i}z(k_{1z}U_{x1} + k_{2z}D_{x1}) + \cdots] \times \exp(-\mathrm{i}k_{1x}x - \mathrm{i}k_{1y}y)\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} \tag{2.92a}$$

同理，

$$\Delta E_y = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}[U_{y1} - D_{y1} + U_{y2} - D_{y2} + \mathrm{i}z(k_{1z}U_{y1} + k_{2z}D_{y1}) + \cdots] \times \exp(-\mathrm{i}k_{1x}x - \mathrm{i}k_{1y}y)\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} + \Delta S \tag{2.92b}$$

其中，

$$\Delta S = \left[-\mathrm{i}k_{2z}z\cos\theta_t\left(\frac{1}{\mu_r} - 1\right)T_{\mathrm{HH}} + \frac{T_{\mathrm{HH}}z^2}{2}(k_2^2 - k_1^2)\right]\exp(\mathrm{i}k_1x\sin\theta_i)$$

$$\Delta E_z = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}[U_{z1} - D_{z1} + U_{z2} - D_{z2} + \mathrm{i}z(k_{1z}U_{z1} + k_{2z}D_{z1}) + \cdots] \times \exp(-\mathrm{i}k_{1x}x - \mathrm{i}k_{1y}y)\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} \tag{2.92c}$$

根据微商关系和边界条件，经过化简可以得到

$$U_{x1} = D_{x1} \tag{2.93a}$$

$$U_{y1} = D_{y1} - \alpha \tag{2.93b}$$

$$k_{1x}\left(U_{z1} - \frac{D_{z1}}{\mu_r}\right) + k_{1z}U_{x1} + \frac{k_{2z}D_{x1}}{\mu_r} + \beta_1 = 0 \tag{2.93c}$$

$$k_{1y}\left(U_{z1} - \frac{D_{z1}}{\mu_r}\right) + k_{1z}U_{y1} + \frac{k_{2z}D_{y1}}{\mu_r} + \beta_2 = 0 \tag{2.93d}$$

$$k_{1z}U_{z1} = k_{1x}U_{x1} + k_{1y}U_{y1} \tag{2.93e}$$

$$k_{2z}D_{z1} = -(k_{1x}D_{x1} + k_{1y}D_{y1}) \tag{2.93f}$$

详细过程参见文献[1]，其中，

$$\alpha = -\mathrm{i}k_2\cos\theta_t\left(\frac{1}{\mu_r} - 1\right)T_{\mathrm{HH}}Z \tag{2.94a}$$

$$\beta_1 = -\mathrm{i}k_1k_{1y}\sin\theta_i\left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right)T_{\mathrm{HH}}Z \tag{2.94b}$$

$$\beta_2 = -\mathrm{i}T_{\mathrm{HH}}\left[\frac{k_2^2\cos^2\theta_t}{\mu_r} - k_1^2\cos^2\theta_i - (k_{1x} + k_1\sin\theta_i)k_1\sin\theta_i\left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right)\right]Z \tag{2.94c}$$

$$Z = Z(k_{1x} + k_1\sin\theta_i, k_{1y}) \tag{2.94d}$$

最后得到上述方程组的解为

$$DU_{x1} = k_{1x}k_{1y}(ak_{2z} - k_{1z})\alpha - \mu_r(k_{1z}k_{2z} + ak_{1y}^2)\beta_1 + a\mu_rk_{1x}k_{1y}\beta_2 \tag{2.95a}$$

$$DU_{y1} = -(ak_{1z}^2k_{2z} + k_{1z}k_{2z}^2 + k_{1y}^2k_{1z})\alpha + a\mu_r k_{1x}k_{1y}\beta_1 - \mu_r(k_{1z}k_{2z} + ak_{1x}^2)\beta_2 \tag{2.95b}$$

其中，

$$D = (k_{1x}^2 + k_{1y}^2)(k_{1z} + \mu_r k_{2z}) + k_{1z}k_{2z}(\mu_r k_{1z} + k_{2z}) \tag{2.96a}$$

$$a = \frac{k_{1z} + \mu_r k_{2z}}{\mu_r k_{1z} + k_{2z}} \tag{2.96b}$$

k_2 为介质 2 中的波数(图 2.1)，T_{HH}为水平极化透射系数。

2.3.3 极化系数的确定

为了求出散射场的场强幅度，将垂直和水平极化散射波的单位极化矢量分别选定为标准球坐标系的单位坐标矢量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_s$ 和 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_s$，

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_s = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_s\cos\phi_s + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta_s\sin\phi_s - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_s \tag{2.97a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_s = -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi_s + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi_s \tag{2.97b}$$

这样，介质 1 中的水平极化散射场为

$$E_{HH}^s = \hat{\boldsymbol{\phi}}_s \cdot \boldsymbol{E}^s = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}(U_{y1}\cos\phi_s - U_{x1}\sin\phi_s)f\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} \tag{2.98}$$

其中，$k_{1x} = -k_1\sin\theta_s\cos\phi_s$，$k_{1y} = -k_1\sin\theta_s\sin\phi_s$，则式(2.98)中被积分式可以化简为

$$U_{y1}\cos\phi_s - U_{x1}\sin\phi_s = (-k_1k_{2z}\cos\phi_s\alpha + \mu_r\sin\phi_s\beta_1 - \cos\phi_s\beta_2)\cdot\frac{\mu_r k_1^2(k_{2z} + \varepsilon_r\cos\phi_s)}{(\mu_r\cos\phi_s + k_{2z})D} \tag{2.99}$$

其中，

$$\alpha = -\mathrm{i}k_2\cos\theta_t\left(\frac{1}{\mu_r} - 1\right)T_{HH}Z \tag{2.100a}$$

$$\beta_1 = \mathrm{i}k_1^2\sin\theta_i\sin\theta_s\sin\phi_s\left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right)T_{HH}Z \tag{2.100b}$$

$$\beta_2 = -\mathrm{i}k_1^2T_{HH}\left[(\varepsilon_r - 1) + \left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right)\sin\theta_i\sin\theta_s\cos\phi_s\right]Z \tag{2.100c}$$

$$D = k_1^3\mu_r(k_{2z} + \varepsilon_r\cos\theta_s) \tag{2.100d}$$

$$k_{2z} = (\mu_r\varepsilon_r - \sin^2\theta_s)^{1/2} \tag{2.100e}$$

$$k_2\cos\theta_t = k_2(\mu_r\varepsilon_r - \sin^2\theta_i)^{1/2} \tag{2.100f}$$

$$T_{HH} = \frac{2\mu_r\cos\theta_i}{\mu_r\cos\theta_i(\mu_r\varepsilon_r - \sin^2\theta_i)^{1/2}} \tag{2.100g}$$

定义极化系数 α_{HH}，令

$$U_{y1}\cos\phi_s - U_{x1}\sin\phi_s = -\mathrm{i}2k_1\cos\theta_i\alpha_{HH}Z \tag{2.101}$$

其中，

$$\alpha_{HH} = \{[k_{2z}(\mu_r\varepsilon_r - \sin^2\theta_i)^{1/2}\cos\phi_s - \mu_r\sin\theta_i\sin\theta_s](\mu_r - 1) - \mu_r^2(\varepsilon_r - 1)$$

$$\times\cos\phi_s\}(k_{2z}+\mu_r\cos\theta_s)^{-1}[\mu_r\cos\theta_i+(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)^{1/2}]^{-1} \tag{2.102a}$$

同理可得

$$\alpha_{VH}=[(\mu_r-1)\varepsilon_r(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)^{1/2}-\mu_r(\varepsilon_r-1)k_{2z}](k_{2z}+\varepsilon_r\cos\theta_s)^{-1}$$
$$\times[\mu_r\cos\theta_i+(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)^{1/2}]^{-1}\sin\phi_s \tag{2.102b}$$

$$\alpha_{HV}=[(\varepsilon_r-1)\mu_r(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)^{1/2}-\varepsilon_r(\mu_r-1)k_{2z}](k_{2z}+\mu_r\cos\theta_s)^{-1}$$
$$\times[\varepsilon_r\cos\theta_i+(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)^{1/2}]^{-1}\sin\phi_s \tag{2.102c}$$

$$\alpha_{VV}=\{[k_{2z}(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)^{1/2}\cos\phi_s-\varepsilon_r\sin\theta_i\sin\theta_s](\varepsilon_r-1)-\varepsilon_r^2(\mu_r-1)$$
$$\times\cos\phi_s\}(k_{2z}+\varepsilon_r\cos\theta_s)^{-1}[\varepsilon_r\cos\theta_i+(\mu_r\varepsilon_r-\sin^2\theta_i)^{1/2}]^{-1} \tag{2.102d}$$

2.3.4　散射系数的推导

由上节可知

$$E_{pq}=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}[-\mathrm{i}2k_1\cos\theta_i\alpha_{pq}Z]f\,\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} \tag{2.103}$$

其中，$Z=Z(k_{1x}+k_1\sin\theta_i,k_{1y})$。于是有

$$\langle E_{pq}E_{pq}^*\rangle=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\iiiint_{-\infty}^{\infty}|2k_1\cos\theta_i\alpha_{pq}|^2\langle ZZ^*\rangle ff^*\,\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y}\mathrm{d}k_{2x}\mathrm{d}k_{2y} \tag{2.104}$$

其中，

$$\langle ZZ^*\rangle=\frac{1}{(2\pi)^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty}\langle z(x',y')z(x,y)\rangle$$
$$\times\exp[-\mathrm{i}(k_{2x}-k_{1x})x'-\mathrm{i}(k_{2y}-k_{1y})y'+\mathrm{i}k_{1x}(x-x')+\mathrm{i}k_{1y}(y-y')]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{2.105}$$

可以求出

$$\langle ZZ^*\rangle=2\pi\delta^2W(k_{1x},k_{1y})\Lambda(k_{2x}-k_{1x})\Lambda(k_{2y}-k_{1y}) \tag{2.106}$$

将式(2.106)代入式(2.104)，并对 k_{2x} 和 k_{2y} 积分得到

$$\langle E_{pq}E_{pq}^*\rangle=\frac{|2k_1\delta\cos\theta_i\alpha_{pq}|^2}{2\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}W(k_{1x}+k_1\cos\theta_i,k_{1y})\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} \tag{2.107}$$

散射场场强的幅度平均可以表示为

$$\langle E_{pq}E_{pq}^*\rangle=\iint_{-\infty}^{\infty}f(k_{1x},k_{1y})\mathrm{d}k_{1x}\mathrm{d}k_{1y} \tag{2.108}$$

比较式(2.107)和式(2.108)可得

$$f(k_{1x},k_{1y})=\frac{|2k_1\delta\cos\theta_i\alpha_{pq}|^2W(k_{1x}+k_1\sin\theta_i,k_{1y})}{2\pi} \tag{2.109}$$

根据散射系数定义可得[1]

$$\sigma_{pq}=4\pi k_1^2\cos^2\theta_s f(k_{1x},k_{1y})=8|k_1^2\delta\cos\theta_i\cos\theta_s\alpha_{pq}|^2W(k_{1x}+k_1\sin\theta_i,k_{1y}) \tag{2.110}$$

当 $\mu_r = 1$ 时，在后向散射情况下，其中，$\theta_i = \theta_s$，$\phi_s = \pi$，$\phi_i = 0$，因此式(2.110)可以退化为

$$\sigma_{pq} = 8k_1^4\delta^2\cos^4\theta_i\,|\,\alpha_{pq}\,|^2 W(2k_1\sin\theta_i) \tag{2.111}$$

其相应的极化系数 α_{pq} 可以表示为

$$\alpha_{HH} = \frac{-(\varepsilon_r - 1)}{[\cos\theta_i + (\varepsilon_r - \sin^2\theta_i)^{1/2}]^2} \tag{2.112a}$$

$$\alpha_{VV} = \frac{(\varepsilon_r - 1)[(\varepsilon_r - 1)\sin^2\theta_i + \varepsilon_r]}{[\cos\theta_i + (\varepsilon_r - \sin^2\theta_i)^{1/2}]^2} \tag{2.112b}$$

$$\alpha_{HV} = \alpha_{VH} = 0 \tag{2.112c}$$

假设表面的相关函数是高斯型，其相应的各向同性粗糙面高斯谱为

$$W(2k_1\sin\theta_i) = \frac{1}{2}l^2\exp[-(k_1 l\sin\theta_i)^2] \tag{2.113}$$

将式(2.113)代入式(2.111)中即可得到高斯粗糙面的后向散射系数。

2.3.5 数值结果及其分析

图 2.7 根据式(2.111)计算了不同粗糙度下的高斯粗糙面的后向散射系数，包括 HH 和 VV 两种极化方式。从图中可以看出，微扰法计算得到的不同极化方式下的粗糙面后向散射系数的变化趋势基本相近，只是幅值大小有所差别。微扰法可以由许多不同的方法推导得到，这在所有粗糙面电磁散射近似方法中是很少见的。如果基于电场积分方程(electric field integral equation，EFIE)，再利用二维 Fourier 逆变换获得自由空间格林函数，结合 Rayleigh 假设，所得的方程与其他方法是等同的，因此，微扰法是一个解电场积分方程的渐近方法。

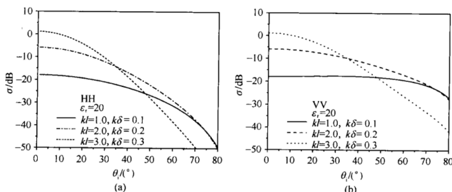


图 2.7 微扰法下粗糙面后向散射系数角分布

2.4　小斜率近似方法

近年来，利用小斜率近似方法研究粗糙面电磁散射问题引起了学者的广泛兴趣，其主要原因在于和微扰法及 Kirchhoff 近似相比，小斜率近似方法不但适用于小起伏粗糙面的电磁散射问题，而且也适用于起伏较大的粗糙面电磁散射的问题。图 2.8 给出了微扰法、Kirchhoff 近似和小斜率近似三种方法适用范围的示意图。

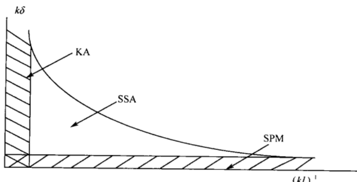


图 2.8　微扰法、Kirchhoff 近似和小斜率近似三种方法适用范围的示意图[5]

从图 2.8 中可以看出，小斜率近似不仅适用于满足微扰法及 Kirchhoff 近似条件下的粗糙面电磁散射问题，而且还适用于两者过渡类型的粗糙面。鉴于小斜率近似方法的优点，本节应用小斜率近似方法研究了粗糙面的电磁散射问题。

2.4.1　小斜率近似的散射振幅

考虑平面电磁波 ψ^{inc} 入射到某一随机起伏粗糙面 $h(\boldsymbol{r})$ 上，$\boldsymbol{r}=(x,y)$，如图 2.1 所示，入射波 ψ^{inc} 具有下面的形式：

$$\psi^{\text{inc}} = q_o^{-1/2}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}+\mathrm{i}\boldsymbol{q}_0 z) \tag{2.114}$$

其中，$\boldsymbol{k}_0$ 和 $\boldsymbol{q}_0$ 分别为入射波矢的水平分量和垂直分量，$q_0=\sqrt{K^2-k_0^2}$，$K=\omega/c$ $(\mathrm{Im}q_0\geqslant 0)$ 为入射波波数，ω 为角频率，c 为光速。散射场可以表示为上半空间未知振幅的平面波的叠加，

$$\psi^s = \int q^{-1/2}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\boldsymbol{q}z)S(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{2.115}$$

其中，$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q})$ 为散射波波矢的水平分量和垂直分量，$q=\sqrt{K^2-k^2}$，表达式中的 $S(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)$ 为小斜率近似的散射振幅[5]。

根据小斜率近似中散射振幅的不变性可以得到，小斜率近似的散射振幅具有下面的形式[6]：

$$S(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}h(\boldsymbol{r})\Phi[\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{r},h(\boldsymbol{r})]\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}(q+q_0)] \tag{2.116}$$

$h(\boldsymbol{r})$是粗糙面任意点的高度，Φ是依赖于粗糙面参数的泛函。将Φ作泛函的泰勒级数展开就可以得到其一阶散射振幅为

$$S_1(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\frac{2(qq_0)^{\frac{1}{2}}}{q+q_0}\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)\frac{1}{(2\pi)^2}\int\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}(q+q_0)h(\boldsymbol{r})]\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2.117}$$

$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)$为依赖于入射波和散射波极化状态的一阶系数矩阵。

2.4.2 小斜率近似的双站散射系数

小斜率近似的一阶散射系数可以通过下面的关系得到[5]：

$$\sigma_{\mathrm{pq}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\langle S_1(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)S_1^*(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)\rangle-|\langle S_1(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)\rangle|^2 \tag{2.118}$$

由式(2.117)可知

$$S_1^*(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\frac{2(qq_0)^{\frac{1}{2}}}{q+q_0}\boldsymbol{B}_1^*(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)\frac{1}{(2\pi)^2}\int\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\boldsymbol{r}+\mathrm{i}(q+q_0)h(\boldsymbol{r})]\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2.119}$$

经过推导可得小斜率近似的双站散射系数[6]为

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{pq}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=&\frac{1}{\pi}\left|\frac{2qq_0}{q+q_0}B_{\mathrm{pq}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)\right|^2\int\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\boldsymbol{r}]\exp[-(q+q_0)^2\rho(0)]\\&\times\{\exp[-(q+q_0)^2\rho(\boldsymbol{r})]-1\}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\end{aligned} \tag{2.120}$$

式(2.120)表示一个在xy面内二重积分形式，其中，$\rho(0)$为粗糙面的高度起伏方差，$\rho(\boldsymbol{r})$为粗糙面的相关函数，$B_{\mathrm{pq}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)$为依赖于入射波和散射波极化状态的一阶系数矩阵元素。具体表达式为[6]

$$B_{11}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}-1}{(\varepsilon_{\mathrm{r}}q_1+q_2)(\varepsilon_{\mathrm{r}}q_{01}+q_{02})}\left(q_2q_{02}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_0}{kk_0}-\varepsilon_{\mathrm{r}}kk_0\right) \tag{2.121a}$$

$$B_{12}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}-1}{(\varepsilon_{\mathrm{r}}q_1+q_2)(q_{01}+q_{02})}\frac{\omega}{c}q_2\frac{\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}_0)}{kk_0} \tag{2.121b}$$

$$B_{21}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}-1}{(\varepsilon_{\mathrm{r}}q_{01}+q_{02})(q_1+q_2)}\frac{\omega}{c}q_{02}\frac{\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}_0)}{kk_0} \tag{2.121c}$$

$$B_{22}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\frac{-(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)}{(q_1+q_2)(q_{01}+q_{02})}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_0}{kk_0} \tag{2.121d}$$

矢量$\boldsymbol{N}=(0,0,1)$是水平面的单位法向矢量。q_{0i}和$q_i(i=1,2)$可通过下面的关系式得到：

$$q_{01}=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_0^2},\quad q_{02}=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\frac{\omega^2}{c^2}-k_0^2},\quad \mathrm{Im}(q_{0i})\geqslant 0 \tag{2.122a}$$

$$q_1=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k^2},\quad q_2=\sqrt{\varepsilon_r\frac{\omega^2}{c^2}-k^2},\quad \mathrm{Im}(q_i)\geqslant 0 \tag{2.122b}$$

在具体计算过程中，由于式(2.120)在直角坐标系下难以处理，因此，通常在极坐标系下处理[7]。考虑入射面位于 xz 面内(图 2.1)，入射角和散射角分别为 θ_i 和 θ_s，则有 $q_0=K\cos\theta_i$，$q=K\cos\theta_s$，$\boldsymbol{k}_0=K\sin\theta_i\hat{\boldsymbol{k}}_0$，$\boldsymbol{k}=K\sin\theta_s\hat{\boldsymbol{k}}$，其中，$\hat{\boldsymbol{k}}_0$和 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 分别为入射波矢和散射波矢在水平方向上投影的单位矢量。在极坐标系下，由于入射面位于 xz 面内，因此，入射方位角 $\varphi_i=0$，散射方位角为 φ_s。令 $Q_z=q+q_0$，由于散射系数为实数，因此，式(2.120)可以写成下面的形式：

$$\sigma_{pq}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\frac{1}{\pi}\left|\frac{2qq_0}{q+q_0}B_{pq}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)\right|^2\int\mathrm{Re}\{\exp[-\mathrm{i}(kr\cos(\varphi-\varphi_s)-k_0r\cos(\varphi-\varphi_i))]\}$$
$$\times\exp[-Q_z^2\rho(0)]\{\exp[-Q_z^2\rho(r)]-1\}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{2.123}$$

进一步化简可以得到以下的双站散射系数计算公式：

$$\sigma_{pq}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)=\frac{1}{\pi}\left|\frac{2qq_0}{q+q_0}B_{pq}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0)\right|^2\int\cos[kr\cos(\varphi-\varphi_s)-k_0r\cos(\varphi-\varphi_i)]$$
$$\times\exp[-Q_z^2\rho(0)]\{\exp[-Q_z^2\rho(r)]-1\}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{2.124}$$

后向散射情况下，$\theta_i=\theta_s$，$\varphi_s=\varphi_i+\pi$，$\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}_0$，由式(2.124)可知小斜率近似方法的后向散射系数表达式为

$$\sigma_{pq}(-\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0)=\frac{1}{\pi}|K\cos\theta_iB_{pq}(-\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0)|^2\int\exp[-Q_z^2\rho(0)]\cos[2k_0r\cos(\varphi-\varphi_i)]$$
$$\times\{\exp[-4K^2\cos^2\theta_i\rho(r)]-1\}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{2.125}$$

2.4.3 数值结果及其分析

为验证小斜率近似方法的准确性，基于高斯粗糙面，将小斜率近似方法的数值结果与实测数据[8]及 Kirchhoff 近似的计算结果进行了比较分析。图 2.9 给出了不同极化状态下的情形，其中，入射角 $\theta_i=20°$，入射波频率 $f=5\mathrm{GHz}$，高斯粗糙面

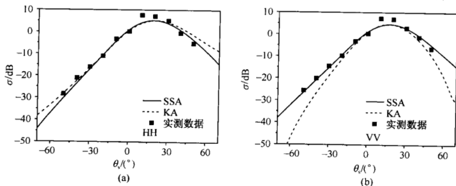


图 2.9　小斜率近似方法和 Kirchhoff 近似方法及与实测数据的比较

的相对介电常数为(6.8,2.8),均方根高度 $\delta=0.04\text{m}$,相关长度 $l=0.06\text{m}$。从图中可以看出,无论是水平极化还是垂直极化,在镜反射方向附近小斜率近似和Kirchhoff 近似与实验测量结果均略有差异,而在实测散射角区域($|\theta_s|<50°$),小斜率近似的数值计算结果与实测数据吻合较好;Kirchhoff 近似的计算结果仅在较小散射角范围内与实测数据有一定吻合(尤其是 VV 极化),随着散射角的增大,Kirchhoff 近似计算结果与实测测量数据偏差增大。

2.5 双尺度方法

2.5.1 粗糙面电磁散射的双尺度方法

自然界中的某些粗糙面同时含有大、小粗糙度或者粗糙度是连续分布的,即有多个尺度的粗糙度。对于这类粗糙面的电磁散射计算,其粗糙度既不在微扰法适用区域又不在 Kirchhoff 近似方法的适用范围,单独使用微扰法或 Kirchhoff 近似方法均不能较客观地反映粗糙面的电磁散射特性。此时可以将表面粗糙度视为大小两种粗糙度的叠加,将微扰法用于小粗糙度,Kirchhoff 近似用于大粗糙度,将小粗糙度计算的散射系数在大粗糙度的斜率分布上作集平均,得到总散射系数,即双尺度方法。

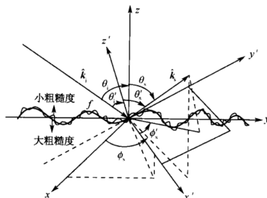


图 2.10 双尺度粗糙面的电磁散射示意图

如图 2.10 所示,假设平面波入射到粗糙面上,粗糙面高度用 $f(x,y)$ 来表示,f_x 和 f_y 分别代表粗糙面沿 x 和 y 方向的导数,表面单位法矢 $\hat{\boldsymbol{n}}=(-\hat{\boldsymbol{x}}f_x-\hat{\boldsymbol{y}}f_y+\hat{\boldsymbol{z}})(1+f_x^2+f_y^2)^{-1/2}$,坐标系$(x,y,z)$为主坐标系,坐标系$(x',y',z')$为本地坐标系。设入射方向与 $\hat{z}$ 成 θ_i 角,与 $\hat{z}'$ 成 θ_i' 角,若方位角 ϕ_i 等于 0°,则入射波矢 $\hat{\boldsymbol{k}}_i=\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_i-\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_i$,本地坐标系中,$\hat{z}'$ 与切平面法线重合,本地单位坐标矢量定义为

$$\begin{cases}\hat{z}' = \hat{n} \\ \hat{y}' = \dfrac{\hat{n}\times\hat{n}_{\mathrm{i}}}{|\hat{n}\times\hat{n}_{\mathrm{i}}|} \\ \hat{x}' = \hat{y}'\times\hat{z}'\end{cases} \tag{2.126}$$

所以

$$\hat{z}' = (-\hat{x}f_x - \hat{y}f_y + \hat{z})(1+f_x^2+f_y^2)^{-1/2} \tag{2.127a}$$

$$\hat{x}' = [\hat{x}(\sin\theta_{\mathrm{i}} - f_x\cos\theta_{\mathrm{i}} + f_y^2\sin\theta_{\mathrm{i}}) - \hat{y}(f_y\cos\theta_{\mathrm{i}} + f_x f_y\sin\theta_{\mathrm{i}}) + \hat{z}(f_x\sin\theta_{\mathrm{i}} - f_x^2\cos\theta_{\mathrm{i}} - f_y^2\cos\theta_{\mathrm{i}})]D_0D_1 \tag{2.127b}$$

$$\hat{y}' = [\hat{x}f_y\cos\theta_{\mathrm{i}} + \hat{y}(\sin\theta_{\mathrm{i}} - f_x\cos\theta_{\mathrm{i}}) + \hat{z}f_y\sin\theta_{\mathrm{i}}]D_1 \tag{2.127c}$$

其中，

$$D_0 = (1+f_x^2+f_y^2)^{-1/2},\quad D_1 = [f_y^2 + (\sin\theta_{\mathrm{i}} - f_x\cos\theta_{\mathrm{i}})^2]^{-1/2}$$

当表面斜率为零时，主坐标系与本地坐标系一致。类似地，定义水平极化矢量 $\hat{h}$，$\hat{h}'$和垂直极化矢量 $\hat{v}$，$\hat{v}'$分别为

$$\hat{h}' = \hat{y}',\quad \hat{v}' = -(\hat{x}'\cos\theta'_{\mathrm{i}} + \hat{z}'\sin\theta'_{\mathrm{i}}) \tag{2.128a}$$

$$\hat{h} = \hat{y},\quad \hat{v} = -(\hat{x}\cos\theta_{\mathrm{i}} + \hat{z}\sin\theta_{\mathrm{i}}) \tag{2.128b}$$

一般情况下，主坐标系中的一个水平极化入射波 $\boldsymbol{E}_0$ 在本地坐标系中可以看成一个水平和一个垂直入射波的叠加，即

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}'} = (\hat{h}'\cdot\hat{h})\boldsymbol{E}_0 \tag{2.129a}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}'} = (\hat{v}'\cdot\hat{h})\boldsymbol{E}_0 \tag{2.129b}$$

在主坐标系与本地坐标系中，分别定义入射波的水平和垂直极化分量。

如果用散射矩阵来表示本地坐标系中入射场与散射场的关系，则有

$$\begin{bmatrix}E^{\mathrm{s}}_{\mathrm{V}'} \\ E^{\mathrm{s}}_{\mathrm{H}'}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_{\mathrm{V'V'}} & S_{\mathrm{V'H'}} \\ S_{\mathrm{H'V'}} & S_{\mathrm{H'H'}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{\mathrm{V}'} \\ E_{\mathrm{H}'}\end{bmatrix} \tag{2.130}$$

其中，$S_{p'q'}$是单位入射场下的散射场，主坐标系中的散射场为

$$\begin{bmatrix}E^{\mathrm{s}}_{\mathrm{VH}} \\ E^{\mathrm{s}}_{\mathrm{HH}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{v}\cdot\hat{v}' & \hat{v}\cdot\hat{h}' \\ \hat{h}\cdot\hat{v}' & \hat{h}\cdot\hat{h}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E^{\mathrm{s}}_{\mathrm{V}'} \\ E^{\mathrm{s}}_{\mathrm{H}'}\end{bmatrix} \tag{2.131}$$

将式(2.129)和式(2.130)代入式(2.131)，得到

$$E^{\mathrm{s}}_{\mathrm{HH}} = [(\hat{h}\cdot\hat{v}')^2 S_{\mathrm{V'V'}} + 2(\hat{h}\cdot\hat{h}')S_{\mathrm{H'V'}}(\hat{v}'\cdot\hat{h}) + (\hat{h}\cdot\hat{h}')^2 S_{\mathrm{H'H'}}]E_0 \tag{2.132}$$

$$E^{\mathrm{s}}_{\mathrm{VH}} = \Big[(\hat{v}\cdot\hat{v}')^2 S_{\mathrm{V'V'}}(\hat{v}'\cdot\hat{h}) + (\hat{v}\cdot\hat{h}')S_{\mathrm{H'H'}}(\hat{h}'\cdot\hat{h}) + [(\hat{v}\cdot\hat{v}')(\hat{h}'\cdot\hat{h}) + (\hat{v}\cdot\hat{h}')(\hat{v}'\cdot\hat{h})]S_{\mathrm{H'V'}}\Big]E_0 \tag{2.133}$$

并根据互易性，即在后向散射情况下，$S_{\mathrm{V'H'}} = S_{\mathrm{H'V'}}$，可以求出 $E^{\mathrm{s}}_{\mathrm{VH}}$和 $E^{\mathrm{s}}_{\mathrm{HH}}$。于是

$$\langle|E^{\mathrm{s}}_{\mathrm{HH}}|^2\rangle = [\langle(\hat{h}\cdot\hat{v}')^4|S_{\mathrm{V'V'}}|^2\rangle + \langle(\hat{h}\cdot\hat{h}')^4|S_{\mathrm{H'H'}}|^2\rangle$$

$$+2\langle(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^2(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')^2\mathrm{Re}\{S_{V'V'}S^*_{H'H'}\}\rangle]|E_0|^2 \quad (2.134)$$

$$\langle|E^s_{VH}|^2\rangle=[\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')^2(\hat{\boldsymbol{v}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})^2|S_{V'V'}|^2\rangle+\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^2(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^2|S_{H'H'}|^2\rangle$$
$$+2\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')(\hat{\boldsymbol{v}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')(\hat{\boldsymbol{h}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})\mathrm{Re}\{S_{V'V'}S^*_{H'H'}\}\rangle]|E_0|^2 \quad (2.135)$$

由于假定小尺度粗糙度和大尺度粗糙度是各自独立地产生的，因此，式(2.135)的集平均应该分别由两个独立平均运算产生。根据文献[1]中对散射系数的定义，此时的散射系数表示为

$$\sigma_{HH}(\theta_i)=\langle(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})^4\sigma_{VV}(\theta'_i)\rangle+\langle(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^4\sigma_{HH}(\theta'_i)\rangle$$
$$+\langle(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^2(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')^2\sigma_{HHVV}(\theta'_i)\rangle \quad (2.136)$$

其中，集平均仅是针对大尺度粗糙度。

$$\sigma_{HHVV}(\theta'_i)=16k^4\delta^2\cos^2\theta'_iW(2k\sin\theta'_i,0)$$
$$\cdot\mathrm{Re}\left\{R^*_{HH}(\theta'_i)\frac{(\varepsilon_r-1)[\sin^2\theta'_i-\varepsilon_r(1+\sin^2\theta'_i)]}{[\varepsilon_r\cos\theta'_i+(\varepsilon_r-\sin^2\theta'_i)^{1/2}]^2}\right\} \quad (2.137)$$

$$\sigma_{HH}(\theta'_i)=8k^4\delta^2\cos^4\theta'_i|R_{HH}(\theta'_i)|^2W(2k\sin\theta'_i,0) \quad (2.138)$$

$$\sigma_{VV}(\theta'_i)=8k^4\delta^2\cos^4\theta'_i\left|\frac{(\varepsilon_r-1)[\sin^2\theta'_i-\varepsilon_r(1+\sin^2\theta_i)]}{[\varepsilon_r\cos\theta'_i+(\varepsilon_r-\sin^2\theta'_i)^{1/2}]^2}\right|^2W(2k\sin\theta'_i,0) \quad (2.139)$$

$\cos\theta'_i=-(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_i)=(\cos\theta_i+f_x\sin\theta_i)(1+f_x^2+f_y^2)^{-1/2}$，$\delta$ 为小尺度粗糙面的均方根高度，W 为粗糙面谱密度函数。类似地可以得到

$$\sigma_{VH}(\theta_i)=\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')^2(\hat{\boldsymbol{v}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})^2\sigma_{VV}(\theta'_i)\rangle$$
$$+\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^2(\hat{\boldsymbol{h}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})^2\sigma_{HH}(\theta'_i)\rangle$$
$$+\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')(\hat{\boldsymbol{v}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')(\hat{\boldsymbol{h}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})\sigma_{HHVV}(\theta'_i)\rangle$$
$$+\langle[(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')(\hat{\boldsymbol{h}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})+(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')(\hat{\boldsymbol{v}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})]^2\sigma_{VH}(\theta'_i)\rangle \quad (2.140)$$

式(2.140)的最后一项是主要项，特别是对于各向同性粗糙面的情况来说，第 1、3 项之和趋于同第 2 项相抵消。当入射波为垂直极化时，根据互易性，可以得到

$$\sigma_{HV}(\theta_i)=\sigma_{VH}(\theta_i)$$
$$=\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')^2(\hat{\boldsymbol{v}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})^2\sigma_{VV}(\theta'_i)\rangle+\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^2(\hat{\boldsymbol{h}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})^2\sigma_{HH}(\theta'_i)\rangle$$
$$+\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')(\hat{\boldsymbol{v}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')(\hat{\boldsymbol{h}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})\sigma_{HHVV}(\theta'_i)\rangle$$
$$+\langle[(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')(\hat{\boldsymbol{h}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})+(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')(\hat{\boldsymbol{v}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})]^2\sigma_{VH}(\theta'_i)\rangle \quad (2.141)$$

将 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 取代 $\hat{\boldsymbol{h}}$，由式(2.136)可得

$$\sigma_{VV}(\theta_i)=\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')^4\sigma_{VV}(\theta'_i)\rangle+\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^4\sigma_{HH}(\theta'_i)\rangle$$
$$+\langle(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^2(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')^2\sigma_{HHVV}(\theta'_i)\rangle \quad (2.142)$$

在式(2.136)、式(2.140)～式(2.142)中对大尺度粗糙度求集平均时，需要引入关于表面斜率 f_x 和 f_y 的概率密度函数 $P(f_x,f_y)$，由于入射发生在 xz 平面内，

f_y 的积分极限由 $-\infty$ 到 ∞，为避免照射到倾斜面的背面去，f_x 的积分极限从 $-\cot\theta_i$ 到 ∞，所以散射系数最终可以表示为[1]

$$\sigma_{HH}(\theta_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\cot\theta_i}^{\infty}(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^4\sigma_{HH}(\theta'_i)P_{\theta_i}(f_x,f_y)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{2.143}$$

$$\sigma_{VV}(\theta_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\cot\theta_i}^{\infty}(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')^4\sigma_{VV}(\theta'_i)P_{\theta_i}(f_x,f_y)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{2.144}$$

$$\sigma_{VH}(\theta_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\cot\theta_i}^{\infty}[(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')(\hat{\boldsymbol{h}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})+(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')(\hat{\boldsymbol{v}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})]^2\sigma_{VH}(\theta'_i)P_{\theta_i}(f_x,f_y)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{2.145}$$

$$\sigma_{HV}(\theta_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\cot\theta_i}^{\infty}[(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}')(\hat{\boldsymbol{h}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})+(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')(\hat{\boldsymbol{v}}'\cdot\hat{\boldsymbol{h}})]^2\sigma_{HV}(\theta'_i)P_{\theta_i}(f_x,f_y)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{2.146}$$

其中，$P_{\theta_i}(f_x,f_y)$ 代表 θ_i 方向观察的大尺度波的斜率概率密度函数：

$$P_{\theta_i}(f_x,f_y)=[1+(f_x\cos\phi_i+f_y\sin\phi_i)\tan\theta_i]P(f_x,f_y) \tag{2.147}$$

$$\sigma_{VH}(\theta'_i)=\sigma_{HV}(\theta'_i)=\left[\pi k^4\delta^4\cos^2\theta'_i\frac{|(\varepsilon_r-1)(R_{VV}-R_{HH})|^2}{2}\right]\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2v^2}{|D_2|^2}\frac{W(u-k\sin\theta'_i,v)}{W(u+k\sin\theta'_i,v)^{-1}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{2.148}$$

$$D_2=(k^2\mu_r\varepsilon_r-u^2-v^2)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon_r(k^2-u^2-v^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.149}$$

对于大小尺度同时具有高斯型均方根高度和相关长度的粗糙面，在散射系数计算中的谱密度函数以及斜率概率密度函数分别为

$$W(t)=\frac{\delta^2t^2}{\pi}\exp\left(-\left(\frac{lt}{2}\right)^2\right),\quad P(f_x,f_y)=\frac{1}{2\pi s^2}\exp\left(-\frac{f_x^2+f_y^2}{2s^2}\right) \tag{2.150}$$

其中，$t=k[\sin^2\theta'_s+\sin^2\theta'_i-2\sin\theta'_s\sin\theta'_i\cos(\phi'_s-\phi'_i)]$，$\phi'_i$ 和 ϕ'_s 为分别为本地坐标系中的入射方位角和散射方位角，s 为均方根斜率。

2.5.2　双尺度法计算实际粗糙海面的电磁散射系数

自然界中的实际风驱粗糙海面，其海浪含有起伏较大的重力波和起伏较小的毛细波，前者为大粗糙度，后者为小粗糙度，因此，海面可以视为由大尺度重力波和小尺度毛细波叠加而成，这恰能运用本节的双尺度方法对其散射特性进行研究，可以理解其结果的合理性。

以下计算结果均采用文献[4]中的海谱模型，研究了风驱粗糙海面的单、双站散射系数随入射角、散射角、方位角的变化特征。图 2.11 给出了分别采用微扰法(仅考虑小粗糙度)、Kirchhoff 近似(仅考虑大粗糙度)以及本节的双尺度法(同时考虑大、小两种粗糙度)计算得到随入射角变化的后向散射系数的结果比较。图中

各参数均来自文献[4]，l 和 δ 分别为粗糙面的相关长度和均方根高度，两者和海谱的形状有关，文献[4]通过对经验海谱进行拟合得到其值，s 代表均方根斜率，它是由 Cox 和 Munk 对实际海面经过实验观测后进行统计分析得到的，风速为 14～16 节，海水温度 20℃，盐度 36‰，ε_r 为海水的相对介电常数。

通过比较可以看出，在小入射角区域，TSM 的计算结果与 KA 的计算结果一致，在中等入射角区域，TSM 的计算结果与 SPM 的计算结果一致，在曲线的转折处附近 TSM 与 SPM、KA 的差异是由于在大尺度的斜率分布上作了集平均，在近掠射角区域曲线的差异是值得修正的，具体将在 6.4 节详细讨论。由于 KA 一般能够较客观地反映大尺度粗糙度的散射特性，SPM 一般能够较客观地反映小尺度粗糙度的散射特性，因此，对于这样的粗糙海面，在小入射角区域，起伏较大的海浪（一般为重力波）对散射系数的贡献占据主导地位；在中等入射角区域，起伏较小的海浪（一般为毛细波）对散射系数的贡献占据主导地位。图 2.12 给出了 HH 极化下，利用 KA 和 TSM 得到的随散射角变化的双站散射系数。从图中可以看出，即使小入射角情形下，KA 与 TSM 的计算结果在大、中散射角下分离，由此可以看出，对于文献[4]中的海谱模型，只有在小入射角、小散射角范围内，KA 的计算结果才能与 TSM 的结果一致。

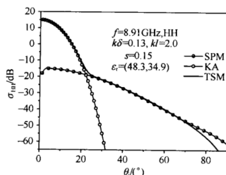


图 2.11 不同方法计算随入射角变化的后向散射系数

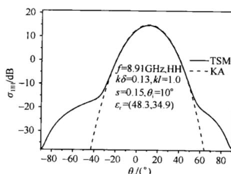


图 2.12 不同方法计算随散射角变化的双站散射系数

图 2.13 给出了分别利用 KA 和 TSM 得到随方位角变化的双站散射系数曲线的比较。可以看出，同极化（VV）下，在大部分散射方位角区域，KA 的结果较 TSM 的结果偏高，尤其在－180°，0°，180°附近区域；但在－90°和 90°附近 KA 的结果较 TSM 的结果偏低。交叉极化（VH）下，在－180°～180°内的大部分散射区域，KA 的结果较 TSM 的结果偏高，在－90°，90°方位角左右，偏高最明显，在－180°，0°，180°附近区域，KA 的结果较 TSM 的结果偏低，在 0°方位角左右的偏低最明显。图 2.14 给出了 HH 和 VV 极化下，由 TSM 得到的随入射角变化的后向散射

系数及与相关文献的测量值[9]的比较。风速等各环境参数与图 2.11 相同，其他参数如图中所示。可以看出，在大部分入射角区域，TSM 结果与文献实测值基本吻合。在大角度下的不一致性，主要是由于未考虑到实际风驱海面上泡沫等离散粒子的体散射对海面的电磁散射的影响，从图中可以看出，HH 极化方式下 TSM 的结果与实测数据差异较 VV 情形大，据此推理，HH 极化方式下泡沫粒子的体散射对海面电磁散射的影响较 VV 极化情形明显。在 6.4 节，考虑了实际风驱粗糙海面的泡沫（气泡、水沫等）粒子对海面电磁散射的影响，在本节 TSM 理论基础上对其进行了一定的修正，对实际风驱粗糙海面的电磁散射进行了计算与讨论。

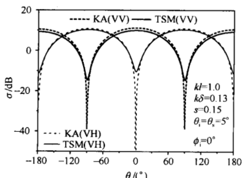


图 2.13　不同方法得到随方位角变化的双站散射系数

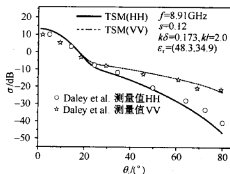


图 2.14　TSM 计算结果与实测数据的比较

参 考 文 献

[1] Ulaby F T, Moore R K, Fung A K. Microwave Remote Sensing (Active and Passive) I, II and III. New York: Addison-Wesley, 1982.

[2] Fung A K. Microwave Scattering and Emission Models and Their Applications. Boston: Artech House, 1994.

[3] Oh Y, Sarabandi K, Ulaby F T. An empirical model and an inversion technique for radar scattering from bare soil surfaces. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 1992, 30(2): 370～381.

[4] Wu S T, Fung A K. A noncoherent model for microwave emissions and backscattering from the sea surface. Journal of Geophysical Research, 1972, 77(30): 5917～5927.

[5] Voronovich A G. Wave Scattering from Rough Surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[6] Voronovich A G, Zavorotny V U. Theoretical model for scattering of radar signals in Ku-and C-bands from a rough sea surface with breaking waves. Waves in Random Media, 2001, 11(3): 247～269.

[7] Bourlier C. Azimuthal harmonic coefficients of the microwave backscattering from a non-gaussian ocean surface with the first-order SSA model. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 2004, 42(11): 2600～2611.

[8] Macelloni G, Nesti G, Pampaloni P et al. Experimental validation of surface scattering and emission models. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 2000, 38(1): 459～469.

[9] Daley J C, Ransome J T, Burkett J A. Radar Sea Return-JOSS I. Washington: Nav Res Lab, 1971.

第3章　粗糙(海)面电磁散射数值方法

第2章中计算粗糙面电磁散射的近似方法大多仅限于求解单次散射，而无法考虑多次散射与多径传播、边缘衍射、相位干涉产生的 Bragg 谐振散射等复杂物理过程。随着计算机技术的飞速发展，精确数值方法在粗糙面电磁散射中的应用越来越广泛[1]。数值方法根据其所求解方程的形式可以分为两类，即微分方程(differential equation，DE)法和积分方程(integral equation，IE)法，二者各有特色。无论是 DE 法还是 IE 法，又都可以分为频域(frequency domain，FD)和时域(time domain，TD)方法两大类，从而数值方法求解散射问题的数学模型就有4种描述方式：①频域积分方程法(FDIE)＋边界条件；②频域微分方程法(FDDE)＋边界条件；③时域微分方程法(TDDE)＋边界条件；④时域积分方程法(TDIE)＋边界条件。也就是说，求解电磁散射问题，既可以在时域内求解，又可以在频域内求解；既可以通过微分方程求解，又可以通过积分方程求解。在频域内求解时，求解过程通常转化为对矩阵求逆的过程；在时域内求解时，求解过程往往转化为一个时间步进迭代过程，即用前面时间步的物理量迭代运算获得后面时间步的物理量。

FDIE 是提出较早且应用广泛的数值方法之一，其最典型的代表是矩量法(method of moments，MOM)，它最早是由 Harrington 提出的[2]。MOM 的求解最终都归结为矩阵的求逆问题，矩阵元素反映了目标面元网格上感应电磁流的耦合关系。随着计算电磁学的发展，在 MOM 方法的基础上，人们提出各种快速算法来有效地提高计算效率，其基本思想都是将矩阵分解为强矩阵和弱矩阵之和，其中，强矩阵是一个稀疏矩阵，它反映了相邻源点和场点间的相互作用，而弱矩阵是一个稠密矩阵，它反映了相距较远的源点和场点间的相互作用。对于强矩阵直接求解，而对于弱矩阵则采用不同的快速算法进行求解。其最典型代表为稀疏矩阵规范网格法(sparse matrix canonical grid，SMCG)和快速多极子方法(fast multipole method，FMM)，以及在此基础上发展起来的多层稀疏矩阵规范网格法(multi-level SMCG，MSMCG)、多层快速多极子方法(multi-level FMM，MLFMM)、最陡下降快速多极子方法(steepest descent FMM，SDFMM)、射线传播快速多极子方法(ray propagation FMM，RPFMM)等。同样还有前后向迭代方法(forward backward method，FBM)及其改进算法，如广义前后向迭代方法(general FBM，GFBM)、广义前后向迭代结合谱加速方法(GFBM/spectral acceleration algorithm，SAA)等也是在矩量法的基础上发展起来的数值方法。

FDDE 的经典方法为有限元法(finite elements method，FEM)，它以变分原理

为基础，把所要求解的边值问题转化为相应的变分问题，再离散化后变成普通多元函数的极值问题，最后通过求解代数方程组得到所求边值问题的数值解。在将区域分解法(domain decomposition method，DDM)与 FEM 相结合以后，可以求解较大尺度的粗糙面电磁散射问题。

TDDE 中最典型的为时域有限差分法(finite difference time domain，FDTD)，作为时域算法，对瞬态问题，FDTD 可直接求解，并且进行一次 Fourier 变换，可求得宽频带响应。对稳态问题，FDTD 可根据稳态场的周期性特点，对场量的时间序列进行简单的参数提取，便可获得稳态场的解。交替隐式时域有限差分方法(alternating direction implicit，ADI-FDTD)以及 FDTD 中改进的建模方法，如共形技术(conformal FDTD)，使得计算精度和效率越来越高，处理的问题更为广泛。

事实上，TDIE 和 FDTD、MOM 同于 20 世纪 60 年代被提出，但之后的 30 年中，TDIE 的发展却十分缓慢，应用远没有 FDTD 和 MOM 广泛，主要原因是 TDIE 的后期振荡无法消除，然而 TDIE 方法在许多方面有突出的优点，如不需人为施加边界条件等。直到 20 世纪 90 年代，三角面元建模运用到 TDIE 算法中以及对各种问题中时间步进(matrching on time，MOT)的隐式算法陆续出现，大大地推动了 TDIE 的发展。

以上 4 种数值算法，构成当今计算电磁学的 4 大主流算法。DE 方法，如 FEM 和 FDTD，其计算区域需要考虑吸收边界所包含的所有区域(包括散射体及其周围的介质空间)，数值离散往往产生相当大的计算量，对开域的散射计算很不方便；而 IE 方法，如 MOM 基于积分形式的 Maxwell 方程，由于 Green 函数自动满足辐射条件，无须另外设置吸收边界条件，具有计算区域有限和散射未知量少的优点。

综上所述，计算粗糙面电磁散射的近似方法与数值方法各有利弊。近似方法具有实现起来简单，但由于采用了各种物理近似，都有一定的适用范围；而数值方法由于直接对 Maxwell 微分或积分方程进行数值求解，具有适用范围广、计算精度高的优点，但对粗糙面掠入射散射计算，常受计算机内存和时间的限制。因此，在实际中究竟采用哪种方法需要根据具体问题具体对待。本章就几种计算粗糙面电磁散射的经典数值方法如 MOM、FMM、FDTD、TDIE 以及相关并行计算方法进行介绍。

3.1　矩量法在一维粗糙面电磁散射中的应用

矩量法的基本思想是首先选择合适的电场或磁场积分方程，再用展开函数把未知量展开，最后用权函数对积分方程两边作内积，从而把积分方程转化为矩阵方程求解。本节就其在一维导体/介质粗糙面电磁散射中的应用进行介绍。

3.1.1　矩量法的基本原理

微分方程和积分方程是最常见的两类方程，而且这两类方程均满足泛函的线性特性，同时可以用下面的广义线性方程来描述[2]：

$$\boldsymbol{L}f = g \tag{3.1}$$

其中，$\boldsymbol{L}$ 是一线性运算算子(微分算子或者积分算子)，g 是已知函数，f 是未知函数。设在 $\boldsymbol{L}$ 的定义域内 f 可以由一系列函数 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 线性叠加得到，即

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \tag{3.2}$$

其中，α_n 是展开系数，f_n 是展开函数，也称基函数，是一组正交完备函数集。理论上，式(3.2)应该是对无穷项求和，但在实际工程应用中不可能进行无穷项求和，只能对式(3.2)进行有限项求和，即对式(3.1)进行有限项的近似。将式(3.2)代入式(3.1)，并利用算子 $\boldsymbol{L}$ 的线性特征可得

$$\sum_n \alpha_n \boldsymbol{L} f_n = g \tag{3.3}$$

假设对此问题已经确定了一个适当的内积$\langle f, g\rangle$[2]，若在 $\boldsymbol{L}$ 的值域内定义一个权函数或检验函数 $W_1, W_2, W_3, \cdots$ 的集合，并对每一个 W_m，取式(3.3)的内积，其结果是一阶微扰解，则有

$$\sum_n \alpha_n \langle W_m, \boldsymbol{L} f_n\rangle = \langle W_m, g\rangle \tag{3.4}$$

其中，$m=1,2,3,\cdots$，方程组(3.4)写成如下矩阵形式：

$$\bar{\bar{\boldsymbol{L}}} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\boldsymbol{g}} \tag{3.5}$$

其中，

$$\bar{\bar{\boldsymbol{L}}} = \begin{bmatrix} \langle W_1, \boldsymbol{L} f_1\rangle & \langle W_1, \boldsymbol{L} f_2\rangle & \cdots \\ \langle W_2, \boldsymbol{L} f_1\rangle & \langle W_2, \boldsymbol{L} f_2\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{g}} = \begin{bmatrix} \langle W_1, g\rangle \\ \langle W_2, g\rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

如果矩阵$\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}$是非奇异的，其逆矩阵$\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}^{-1}$存在，则 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 可由下式得出：

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\bar{\boldsymbol{L}}}^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{g}} \tag{3.8}$$

可见 f 的解由式(3.2)给出，设基函数向量为

$$\bar{\boldsymbol{f}} = [f_1, f_2, f_3, \cdots]^{\mathrm{T}} \tag{3.9}$$

f 的矩量法解可以写成

$$f = \bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}} \cdot \{\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{g}}\} \tag{3.10}$$

此解是精确还是近似取决于 f_n 和 W_m 的选择，当 $W_n = f_n$ 时，称其为伽辽金(Galerkin)方法。

任何一个特定问题的主要任务是选择合适的 f_n 和 W_m，对 f_n 的选择要使它的某种叠加能相当好地逼近 f，对 W_m 的选择则是使误差尽可能小。影响选择 f_n 和 W_m 的一些其他因素为：①问题所要求的精度；②计算矩阵元素的难易；③能够求逆的矩阵的大小；④良态矩阵$\bar{\bar{L}}$的可实现性。

在矩量法中应用的关键技术主要集中在基函数的选取、权函数的选取、展开项数的确定及内积的定义 4 个方面，特别是基函数和权函数的选取，它们对能否得到问题的正确解起着举足轻重的作用。基函数必须是线性无关的完备序列。所谓完备序列是指泛函的每个可取函数都可以用某个基函数序列的线性组合任意地逼近。例如，正幂函数序列就是线性无关的完备序列；又如，三角函数序列，它们构成的近似解是代数多项式或三角多项式。这些序列的元素既易于作微积分运算，又便于适应规则形状边界上的齐次条件。基函数可以分为两类：全域基函数与分域基函数；权函数可以分为三类：全域权函数、分域权函数与点选配。它们之间的不同组合便形成不同的方法。下面简单的对其中的一些予以介绍。

(1) 全域基函数。所谓全域基函数是指在算子 $\boldsymbol{L}$ 的整个定义域内存在的一组基函数，它们应该满足边界条件，并且彼此线性无关。在矩量法求解的离散化过程中，选择全域基函数作为展开函数，实质上是将未知函数表示为全域存在的若干个离散化基函数的线性组合。

(2) 分域基函数。分域基函数不是在算子 $\boldsymbol{L}$ 的定义域的全域上存在的，而仅仅是存在于算子定义域的各个分域上的函数。选择分域基函数作为未知函数的展开函数，在矩量法求解的离散化过程中是一种区域离散，即未知函数表示为各个分域上存在的函数之线性组合。

(3) 全域权函数。在算子 $\boldsymbol{L}$ 的值域内选择一组权函数，它是一组在 $\boldsymbol{L}$ 值域的全域上存在的权函数。

(4) 点选配。全域基、全域权的伽辽金法是一种常用的求解方法。但是，如果算子本身是复杂的积分算子，或者选择了比较复杂的基函数，由于内积运算本身又是积分运算，从而使矩阵与向量元素的形成十分复杂。为了简化，利用狄拉克 Λ 函数的筛选性

$$\int f(x)\Lambda(x-x_0)\mathrm{d}x = f(x_0) \tag{3.11}$$

选用 Λ 函数作为权函数，将内积计算得以简化。这种以 Λ 函数为权函数的取样检验过程实质上是使近似函数在一些离散的取样点上满足算子方程，因此，称为点选配。

3.1.2 矩量法在一维导体粗糙面电磁散射中的应用

如图 3.1 所示，入射波 $\psi^{inc}(\boldsymbol{r})$投射到一维随机粗糙面上，粗糙面的高度函数为 $z=f(x)$，定义场点位置矢量 $\boldsymbol{r}=x\hat{x}+z\hat{z}$，源点位置矢量 $\boldsymbol{r}'=x'\hat{x}+z'\hat{z}$，空间总的波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$满足

$$\psi(\boldsymbol{r})=\psi^{inc}(\boldsymbol{r})+\psi^{s}(\boldsymbol{r}) \tag{3.12}$$

其中，$\psi^{s}(\boldsymbol{r})$代表散射波函数。而总的波函数满足 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2+k_0^2)\psi(\boldsymbol{r})=0 \tag{3.13}$$

k_0 为自由空间的波数，二维格林函数满足如下方程：

$$(\nabla^2+k_0^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\Lambda(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3.14}$$

其中，

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{3.15}$$

$H_0^{(1)}(\cdot)$表示第一类零阶汉克尔(Hankel)函数，根据格林定理，可以得到二维空间粗糙面电磁散射积分方程如下[3]：

$$\begin{aligned}\psi^{inc}(\boldsymbol{r})&=\int_S \mathrm{d}s'\hat{\boldsymbol{n}}'\cdot[\psi(\boldsymbol{r}')\nabla'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla'\psi(\boldsymbol{r}')]\\&=\begin{cases}\psi(\boldsymbol{r}), & r\in\Omega_0\\0, & r\in\Omega_1\end{cases}\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{n}}'$表示粗糙面的单位法矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}'=\dfrac{-f'(x')\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{1+[f'(x')]^2}}$，$f'(x')$是 $f(x')$的一阶导数。

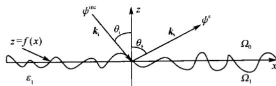


图 3.1 一维粗糙面电磁散射示意图

1. HH 极化

在讨论 HH 极化(TE 波入射)时，假设入射电场 $\boldsymbol{E}^{inc}=\hat{\boldsymbol{y}}E_0^{inc}=\hat{\boldsymbol{y}}\psi^{inc}$，总的电场满足 Dirichlet 边界条件，即 $\psi(\boldsymbol{r})=0$，其中，$\boldsymbol{r}\in S$(S 为粗糙表面)，通过化简式(3.16)，可以得到 HH 极化下的电场积分方程(electric field integral equation, EFIE)为

$$\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}) = \int_S \mathrm{d}s' G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{r}') \tag{3.17}$$

将粗糙面的轮廓信息代入到 EFIE 中可以得到

$$\psi^{\text{inc}}(x,f(x)) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x' \sqrt{1+(f'(x'))^2}\, G(x,f(x);x',f(x'))(\hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \nabla'\psi(\boldsymbol{r}'))_{z=f(x')} \tag{3.18}$$

定义

$$b(x) = \psi^{\text{inc}}(x,f(x)) \tag{3.19a}$$

$$U(x') = \sqrt{1+(f'(x'))^2}\,(\hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \nabla'\psi(\boldsymbol{r}'))_{z=f(x')} \tag{3.19b}$$

$$K(x,x') = G(x,f(x);x',f(x')) \tag{3.19c}$$

积分方程(3.18)就变为

$$b(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x' K(x,x')U(x') \tag{3.20}$$

将$-\frac{L}{2}\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}$划分为 N 段，每段长度 $\Delta x=\frac{L}{N}$，每段的中点坐标记作 x_m，其中，$m=1,2,\cdots,N$。基函数选取分域脉冲基函数，即第 n 段的 U 值用其中点处的值代替，即 $U(x')=U_n$。在 $x=x_m$ 处定义 Λ 函数为检验函数，即点匹配方法，这样原积分方程变为

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x' K(x_m,x')U(x') = b(x_m) \tag{3.21}$$

因为每一小段的 $U(x')$ 值为定值，将积分式用求和式代替，兼顾到 Hankel 函数的奇异性，式(3.21)可写为

$$\Delta x \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} K(x_m,x_n)U(x_n) + \left[\int_m \mathrm{d}x' K(x_m,x')\right]U(x_m) = b(x_m) \tag{3.22}$$

当 x' 和 x_m 很接近时，利用 Hankel 函数的小宗量近似

$$H_0^{(1)}(\omega) = 1 + \mathrm{i}\,\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma\omega}{2}\right) \tag{3.23}$$

γ 是欧拉常数，$\gamma=1.78107$。再利用泰勒展开，近似用差分代替微分

$$-f(x_m) + f(x') = f'(x_m)(x'-x_m) \tag{3.24}$$

可以得到自作用单元

$$\begin{aligned}
\int_m \mathrm{d}x' K(x_m,x') &= 2\int_{x_m}^{x_m+\frac{\Delta x}{2}} \mathrm{d}x' K(x_m,x') \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \mathrm{d}x' \left[1 + \mathrm{i}\,\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma}{2}k_0\Delta x\sqrt{1+(f'(x_m))^2}\right)\right] \\
&= \frac{\mathrm{i}\Delta x}{4}\left\{1 + \mathrm{i}\,\frac{2}{\pi}\ln\left[\frac{\gamma k_0}{4\mathrm{e}}\Delta x\sqrt{1+(f'(x_m))^2}\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathrm{i}\Delta x}{4}\left[1+\mathrm{i}\,\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma k_0}{4\mathrm{e}}\Delta l_m\right)\right] \tag{3.25}$$

其中，$\Delta l_m = \Delta x\sqrt{1+(f'(x_m))^2}$。令

$$U(x_n) = U_n,\quad b(x_m) = b_m,\quad A_{mn} = \begin{cases} \Delta x K(x_m, x_n), & m \neq n \\ \dfrac{\mathrm{i}\Delta x}{4}\left[1+\mathrm{i}\,\dfrac{2}{\pi}\ln\left(\dfrac{\gamma k_0}{4\mathrm{e}}\Delta l_m\right)\right], & m = n \end{cases} \tag{3.26}$$

可以得到

$$\sum_{n=1}^{N} A_{mn} U_n = b_m \tag{3.27}$$

其矩阵形式为

$$\bar{\bar{A}} \cdot \bar{U} = \bar{b} \tag{3.28}$$

2. VV 极化

这里在讨论 VV 极化(TM 波入射)时，假设入射磁场 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}} = \hat{\boldsymbol{y}} H_0^{\mathrm{inc}} = \hat{\boldsymbol{y}}\psi^{\mathrm{inc}}$，总的磁场满足 Neumann 边界条件，即 $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{r}) = 0$，其中，$\boldsymbol{r} \in S$，类似于 EFIE，可以得到磁场积分方程(magnetic field integral equation，MFIE)，只不过 MFIE 是第二类 Fredholm 积分方程，需要进行奇异点处理，这里不再赘述，详细推导参见文献[3]。最终的 MFIE 为

$$\psi^{\mathrm{inc}}(x) + \mathrm{P.V.}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x'\psi(x')K_N(x,x') = \frac{1}{2}\psi(x) \tag{3.29}$$

其中，P. V. 表示柯西主值积分。同样采用分域脉冲基函数以及点匹配方法的矩量法，令

$$\psi^{\mathrm{inc}}(x_m) = b(x_m) = b_m,\quad \psi(x_m) = \psi_m,\quad B_{mn} = \begin{cases} -\Delta x K_N(x_m, x_n), & m \neq n \\ \dfrac{1}{2}, & m = n \end{cases} \tag{3.30}$$

MFIE 最后变为

$$\sum_{n=1}^{N} B_{mn}\psi_n = b_m \tag{3.31}$$

其中，

$$K_N(x,x') = \frac{\mathrm{i}k_0}{4}\,\frac{H_1^{(1)}\left(k_0\sqrt{(x-x')^2+(f(x)-f(x'))^2}\right)}{\sqrt{(x-x')^2+(f(x)-f(x'))}} \times \{f'(x')(x'-x) - [f(x')-f(x)]\} \tag{3.32}$$

$H_1^{(1)}(\cdot)$是第一类一阶 Hankel 函数，式(3.30)中的自作用单元是由一阶近似得到

的,还可以使其表达式更为精确,即取

$$
\begin{aligned}
I &= \mathrm{P.V.}\int_{x_m-\frac{\Delta x}{2}}^{x_m+\frac{\Delta x}{2}} \mathrm{d}x' K_N(x_m,x') \\
&= \frac{\mathrm{i}k_0}{4}\int_{x_m-\frac{\Delta x}{2}}^{x_m+\frac{\Delta x}{2}} \mathrm{d}x' \frac{H_1^{(1)}\left(k_0\sqrt{(x_m-x')^2+(f(x_m)-f(x'))}\right)}{\sqrt{(x_m-x')^2+(f(x_m)-f(x'))}} \\
&\quad \times \{f'(x')(x'-x_m)-[f(x')-f(x_m)]\}
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

根据泰勒展开有

$$
f(x') = f(x_m)+f'(x_m)(x'-x_m)+\frac{f''(x_m)}{2}(x'-x_m)^2 \tag{3.34a}
$$

$$
f'(x') = f'(x_m)+f''(x_m)(x'-x_m) \tag{3.34b}
$$

所以得到

$$
\sqrt{(x_m-x')^2+(f(x_m)-f(x'))^2} \approx \sqrt{(x_m-x')^2+(f'(x_m)(x_m-x'))^2} \tag{3.35a}
$$

$$
f'(x')(x'-x_m)-[f(x')-f(x_m)] = \frac{f''(x_m)}{2}(x_m-x')^2 \tag{3.35b}
$$

结合第一类一阶 Hankel 函数的小宗量近似

$$
H_1^{(1)}(\omega) = -\frac{2\mathrm{i}}{\pi\omega} \tag{3.36}
$$

自作用积分可以表示为

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi}\int_{x_m-\frac{\Delta x}{2}}^{x_m+\frac{\Delta x}{2}} \mathrm{d}x' \frac{\frac{f''(x_m)}{2}(x'-x_m)^2}{(x'-x_m)^2+(f'(x_m)(x_m-x'))^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x_m-\frac{\Delta x}{2}}^{x_m+\frac{\Delta x}{2}} \mathrm{d}x' \frac{f''(x_m)}{2[1+(f'(x_m))^2]}
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

经过计算可得

$$
I = \frac{\Delta x}{4\pi}\frac{f''(x_m)}{1+(f'(x_m))^2} \tag{3.38}
$$

这时矩阵元素的表达式为

$$
B_{mn} = \begin{cases} -\Delta x K_N(x_m,x_n), & m \neq n \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\Delta x}{4\pi}\dfrac{f''(x_m)}{1+(f'(x_m))^2}, & m = n \end{cases} \tag{3.39}
$$

3. 入射锥形波的实现

在粗糙面电磁散射数值仿真中,粗糙面的长度被限制在$\pm L/2$之间,这就意味着当$|x|>L/2$时,粗糙表面电流为零。粗糙面上的电流在边缘处从非零突变到零,会引入人为反射。为了避免这一问题的出现,可以引入锥形波[4],即随着x远

离粗糙面中心，入射波强度按高斯函数衰减到零。其形式如下：

$$\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}) = \exp\{\mathrm{i}k_0(x\sin\theta_\mathrm{i} - z\cos\theta_\mathrm{i})[1 + w(\boldsymbol{r})]\}\exp\left[-\frac{(x + z\tan\theta_\mathrm{i})^2}{g^2}\right] \tag{3.40}$$

其中，g 是锥形波射束宽度参数，θ_i 是入射角，入射波矢量

$$\boldsymbol{k}_\mathrm{i} = k_0(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_\mathrm{i} - \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_\mathrm{i}) \tag{3.41}$$

取附加相位项 $w(\boldsymbol{r})$ 为

$$w(\boldsymbol{r}) = \frac{2\dfrac{(x + z\tan\theta_\mathrm{i})^2}{g^2} - 1}{(k_0 g\cos\theta_\mathrm{i})^2} \tag{3.42}$$

图 3.2 给出了利用蒙特卡罗方法模拟的长度 $L=102.4\lambda$，均方根高度 $\delta=0.1\lambda$，相关长度 $l=0.5\lambda$，每个波长采样 10 个点的高斯粗糙面模型在锥形波照射下表面场强 $|\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r})|$ 的分布图，其中，入射角 $\theta_\mathrm{i}=30°$，射束宽度 $g=L/4$。可以看出，越接近粗糙面的边缘，照射场强就越弱，这样在粗糙面数值仿真计算中就可以避免人为反射。

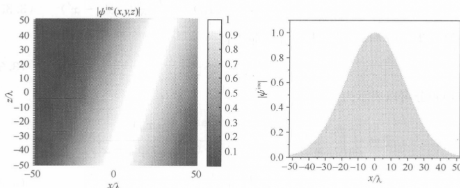


图 3.2　高斯粗糙面在锥形波照射下表面入射场强度分布图

4. 双站散射系数的求解

入射标量波的坡印亭(Poynting)矢量为

$$\boldsymbol{S}^{\text{inc}} = -\frac{1}{2\eta_0 k_0}\mathrm{Im}\{\psi^{\text{inc}}\nabla[(\psi^{\text{inc}})^*]\} \tag{3.43}$$

其中，$\eta_0=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ 是自由空间波阻抗，在 $z=0$ 处有

$$(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{S}^{\text{inc}})\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2\eta_0 k_0}\mathrm{Im}\left(\psi^{\text{inc}}\frac{\partial[(\psi^{\text{inc}})^*]}{\partial z}\right)\Big|_{z=0}$$

$$=-\frac{1}{2\eta_0 k_0}\left\{k_0\cos\theta_i\left[1+\frac{\frac{2x^2}{g}-1}{(k_0 g\cos\theta_i)^2}\right]-\frac{4k_0\sin\theta_i\tan\theta_i x^2}{(k_0 g\cos\theta_i)^2}\right\}\exp\left(-\frac{2x^2}{g}\right) \tag{3.44}$$

投射到整个粗糙面的功率为 $P^{inc}=-\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x(\boldsymbol{S}^{inc}\cdot\hat{z})|_{z=0}$，经过积分可以得到[3]

$$P^{inc}=\frac{\cos\theta_i}{2\eta_0}g\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{1+2\tan^2\theta_i}{2(k_0 g\cos\theta_i)^2}\right] \tag{3.45}$$

假设粗糙表面的散射电场和磁场分布已经通过求解矩阵方程得到，可以通过惠更斯(Huygens)原理求出空间的散射波。

由式(3.16)可以得到散射场为

$$\psi^s(\boldsymbol{r})=\int_S \mathrm{d}s'\hat{\boldsymbol{n}}'\cdot[\psi(\boldsymbol{r}')\nabla'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla'\psi(\boldsymbol{r}')] \tag{3.46}$$

可见，$\psi^s(\boldsymbol{r})$可以通过上面的积分求得。为了计算双站散射，将 $\boldsymbol{r}$ 放置在远场观察，观察方向波矢量为 $\boldsymbol{k}_s=k_0(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_s+\hat{z}\cos\theta_s)$。将式(3.15)中 Hankel 函数的远场近似按不同传播方向，不同振幅的平面波展开有

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\exp(\mathrm{i}k_0 r)\exp(-\mathrm{i}k_0(x'\sin\theta_s+f(x')\cos\theta_s)) \tag{3.47a}$$

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}}'\cdot\nabla'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{z=f(x')}\sqrt{1+(f'(x'))^2}\\&=\frac{\mathrm{i}}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\exp(\mathrm{i}k_0 r)\\&\quad\times[f'(x')\mathrm{i}k_0\sin\theta_s-\mathrm{i}k_0\cos\theta_s]\exp[-\mathrm{i}k_0(\sin\theta_s x'+\cos\theta_s f(x'))]\end{aligned} \tag{3.47b}$$

散射场最终可以表示为

$$\psi^s(\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{i}}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\exp(\mathrm{i}k_0 r)\psi_s^N(\theta_s) \tag{3.48}$$

其中，

$$\begin{aligned}\psi_s^N(\theta_s)=&\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x'\{-U(x')+\psi(x')\mathrm{i}k_0[f'(x')\sin\theta_s-\cos\theta_s]\}\\&\times\exp\{-\mathrm{i}k_0[\sin\theta_s x'+\cos\theta_s f(x')]\}\end{aligned}$$

$$\psi(x')=\psi(x',f(x')),\quad U(x')=(\hat{\boldsymbol{n}}'\cdot\nabla'\psi(x'))|_{z=f(x')}\sqrt{1+(f'(x'))^2}$$

散射波的坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S}^s(\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{2\eta_0 k_0}\mathrm{Im}\{\psi^s(\boldsymbol{r}')[\nabla\psi^s(\boldsymbol{r}')]^*\} \tag{3.49}$$

采用远场近似后有

$$\boldsymbol{S}^{s}(\boldsymbol{r}') = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}'}{2\eta_0}\left(\frac{1}{8\pi k_0 r'}\right)|\psi_s^N(\theta_s)|^2 \tag{3.50}$$

总的散射功率就等于对粗糙面上半空间积分

$$P^s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_s \hat{\boldsymbol{r}}' \cdot \boldsymbol{S}^s(\boldsymbol{r}') = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_s \frac{1}{2\eta_0}\left(\frac{1}{8\pi k_0}\right)|\psi_s^N(\theta_s)|^2 \tag{3.51}$$

双站散射系数 $\sigma(\theta_s)$ 定义为[3]

$$\frac{P^s}{P^{inc}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_s \sigma(\theta_s) \tag{3.52}$$

可以求出 $\sigma(\theta_s)$ 的表达式为[3]

$$\sigma(\theta_s) = \frac{|\psi_s^N(\theta_s)|^2}{8\pi k_0 g\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\theta_i\left[1 - \frac{1+2\tan^2\theta_i}{2(k_0 g\cos\theta_i)^2}\right]} \tag{3.53}$$

3.1.3 矩量法在一维介质粗糙面散射中的应用

设介质粗糙面的相对介电常数为 ε_1（图 3.1），电磁波照射到介质粗糙表面后，粗糙表面上既有电流也有磁流存在，必须建立双积分方程。双积分方程的建立过程这里不再赘述，详细的推导过程参见文献[3]，这里直接给出双积分方程

$$\psi^{inc}(x) + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx'[\psi(x')K_N(x,x') - K(x,x')U(x')] = \frac{1}{2}\psi(x) \tag{3.54a}$$

$$\frac{1}{2}\psi(x) + \text{P. V.}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx'[\psi(x')K_{1N}(x,x') - \rho K_1(x,x')U(x')] = 0 \tag{3.54b}$$

其中，

$$\rho = \begin{cases} 1, & \text{HH} \\ \varepsilon_1, & \text{VV} \end{cases} \tag{3.55a}$$

$$K_1(x,x') = \frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(k_1\sqrt{(x-x')^2 + (f(x)-f(x'))^2}\right) \tag{3.55b}$$

$$K_{1N}(x,x') = \frac{ik_1}{4}\frac{H_1^{(1)}\left(k_1\sqrt{(x-x')^2 + (f(x)-f(x'))^2}\right)}{\sqrt{(x-x')^2 + (f(x)-f(x'))}} \times \{f'(x')(x'-x) - [f(x')-f(x)]\} \tag{3.55c}$$

类似于导体情形，利用矩量法对式(3.54a)、式(3.54b)进行离散，可以得到

$$\sum_{n=1}^{N} A_{mn}U_n + \sum_{n=1}^{N} B_{mn}\psi_n = b_m \tag{3.56a}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \rho A_{mn}^{(1)}U_n + \sum_{n=1}^{N} B_{mn}^{(1)}\psi_n = 0 \tag{3.56b}$$

A_{mn} 和 B_{mn} 如导体问题中所述，而

$$A_{mn}^{(1)} = \begin{cases} \Delta x K_1(x_m, x_n), & m \neq n \\ \dfrac{\mathrm{i}\Delta x}{4}\left[1 + \mathrm{i}\,\dfrac{2}{\pi}\ln\left(\dfrac{\gamma k_1}{4\mathrm{e}}\Delta l_m\right)\right], & m = n \end{cases} \tag{3.57a}$$

$$B_{mn}^{(1)} = \begin{cases} -\Delta x K_{1N}(x_m, x_n), & m \neq n \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\Delta x}{4\pi}\dfrac{f''(x_m)}{1 + (f'(x_m))^2}, & m = n \end{cases} \tag{3.57b}$$

解得未知数 U 和 ψ 以后，便可以由式(3.48)和式(3.53)计算介质粗糙面双站散射系数。

3.1.4　数值计算及结果分析

1. 矩量法研究一维导体高斯粗糙面电磁散射特性

首先研究均方根高度对高斯粗糙面的电磁散射特性的影响。图 3.3 给出了 HH 极化下，相关长度 $l=0.5\lambda$，均方根高度 δ 从 0.05λ 变化到 0.6λ 时导体高斯粗糙面的双站散射系数，其中，入射角 $\theta_i=30°$，粗糙面统计样本个数为 100。可以看出，在小粗糙度($\delta=0.05\lambda\sim0.2\lambda$)情况下，随着均方根高度的增加，镜反射方向附近的散射系数减小，其余方向散射系数增加；在大粗糙度($\delta=0.2\lambda\sim0.6\lambda$)情况下，随着均方根高度的进一步增加，后向方向的散射系数增强，即所谓的后向增强效应，以上这些现象是由于随着高斯粗糙面的均方根高度增加，粗糙面的高度起伏变大，粗糙面变得越来越粗糙所造成的。

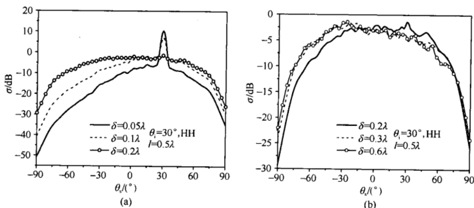


图 3.3　不同均方根高度时一维导体高斯粗糙面双站散射系数对比

以下分析相关长度对高斯粗糙面的电磁散射特性的影响，图 3.4 给出了 VV 极化下，均方根高度 $\delta=0.1\lambda$，相关长度分别为 0.25λ，0.5λ 和 1.0λ 时的导体高斯粗糙面的双站散射系数，其中，入射角 $\theta_i=45°$，粗糙面统计样本仍为 100。可以看出，双站散射系数在镜向方向的相干散射峰值不随相关长度的变化而变化，但随着

相关长度的增加非镜向方向散射系数迅速下降。由于相关长度决定着粗糙面变化的周期，当 l 减小时，粗糙面均方根斜率增大，从而引起非镜向方向散射分量是增强的。

图 3.5 给出了不同极化方式下，一维导体高斯粗糙面双站散射系数的对比，其中，均方根高度 $\delta=0.1\lambda$，相关长度 $l=0.5\lambda$，入射角 $\theta_i=40°$。可以看出在此入射条件下，HH 极化的双站散射系数在镜向方向比 VV 极化的要大，而在非镜向方向上，HH 极化的散射系数要小于 VV 极化情形。

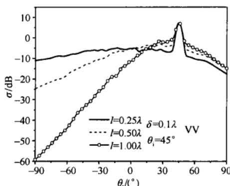


图 3.4　不同相关长度下一维导体高斯粗糙面双站散射系数对比

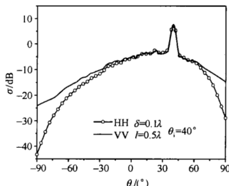


图 3.5　不同极化方式下一维导体高斯粗糙面双站散射系数对比

2. 矩量法研究一维介质高斯粗糙面电磁散射特性

图 3.6 和图 3.7 利用矩量法研究了介质高斯粗糙面的电磁散射特性，计算参数如图所示。粗糙面样本个数均为 100。由图可见，均方根高度与相关长度对介质高斯粗糙面电磁散射特性的影响与导体高斯粗糙面情形类似，这里不再赘述。

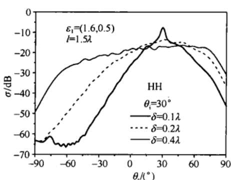


图 3.6　不同均方根高度下一维介质高斯粗糙面双站散射系数对比

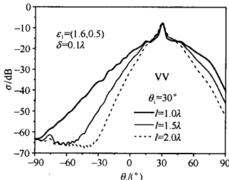


图 3.7　不同相关长度下一维介质高斯粗糙面双站散射系数对比

图 3.8 给出了介电常数对介质高斯粗糙面双站散射系数的影响。从图中可以发现，随着介电常数的实部或虚部的增加，双站散射系数幅值均是增大的，并且实部对散射系数的影响更为明显。

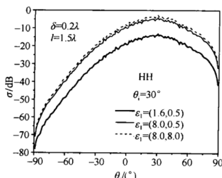


图 3.8　不同介电常数下介质高斯粗糙面双站散射系数对比

3.2　快速多极子方法在一维大尺度海面掠入射电磁散射中的应用

以往对随机粗糙面电磁散射问题的研究，一般只考虑入射角小于 80°的情况。随着雷达的广泛应用，粗糙面的掠入射散射问题已引起了人们的广泛关注，对于粗糙面掠入射散射问题的研究在大尺度的雷达海洋遥感、目标跟踪以及通信和航海等诸多领域都有着重要的实际意义。本节中引入的快速多极子方法(fast multipole method，FMM)是基于 3.1 节矩量法的一种快速算法，利用其研究电磁波掠入射情形下，一维导体和介质粗糙海面的电磁散射问题，克服了矩量法计算时间和内存需求量方面的缺陷。

假设电磁波 $\psi^{inc}(\boldsymbol{r})$ 掠入射到如图 3.9 所示的高度函数为 $z=f(x)$ 的一维 PM[5] 粗糙海面上，其中，θ_i 和 θ_s 分别为入射角和散射角。为了消除由模拟粗糙海面长度的有限而在截断边缘处引起的人为反射，入射电磁波依然采用式(3.40)的锥形波，粗糙海面的长度 L 和锥形波因子 g 满足如下条件[6]：

$$g > \frac{6}{(\cos\theta_i)^{1.5}}\lambda \tag{3.58}$$

$$L > 15l_c \approx 3.8U_{19.5}^2 \quad 和 \quad L \geqslant 4g \tag{3.59}$$

其中，l_c 表示粗糙海面的相关长度。

从式(3.58)、式(3.59)可以很明显地发现当电磁波掠入射时，模拟的粗糙面长度必须足够长，才能保证计算结果的准确性。假设入射角为 85°，海面风速 $U_{19.5}=$

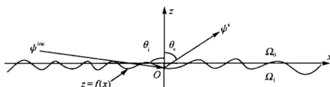


图 3.9　电磁波掠入射到粗糙海面的几何示意图

12m/s，入射波波长为 0.2m，根据式(3.58)、式(3.59)，模拟粗糙面长度必须满足 $L\geqslant 3.8\times 12^2\text{m}=547.2\text{m}=2736\lambda$，若粗糙海面每个波长采样 10 个点，则采样点数 $N\geqslant 27360$，若用 3.1 节中的矩量法处理这一问题，储存量与计算量无疑是一挑战，所以在实际计算中必须采用快速算法才能解决该问题。

3.2.1　快速多极子方法

快速多极子方法较早由美国耶鲁大学数学家 Rokhlin 提出[7]。Chew 教授带领的研究小组将快速多极子方法应用到求解二维、三维电磁散射问题中的电场、磁场积分方程以及混合积分方程中[8]。本节将快速多极子方法引入到粗糙面掠入射散射问题，成功地求解了电磁波掠入射时粗糙海面的双站散射特性。

快速多极子方法的基本原理是：将散射体表面离散得到的子散射体进行分组，并将矩量法中任意两个子散射体之间简单的直接相互作用关系，通过引入电话系统中使用的“集线器”思想，转化为聚合—转移—解聚关系。

快速多极子方法的数学基础是：利用加法定理对矩阵元素中格林函数进行处理，通过格林函数的角谱展开，即引入平面波将算子对角化，最终将矩量法中的单层矩阵-向量乘积(图 3.10)转化为如图 3.11 所示的两层矩阵-向量乘积。

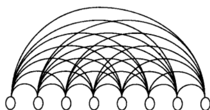


图 3.10　一个单层矩阵-向量乘积图，其中，元素之间是直接相互作用

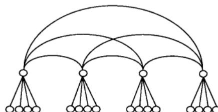


图 3.11　一个两层矩阵-向量乘积图，其中，元素之间的相互作用分三步完成

通过 3.1 节的学习，可以知道矩量法在处理矩阵方程时采用的是单层的矩阵-向量乘积，即所有的源点与场点之间直接相互作用(图 3.10)。快速多极子方法中矩阵元素之间的相互作用采用如图 3.11 所示的类似电话系统中的集线器结构图，

将矩量法中的直接相互作用分解为三步(聚合、转移、解聚)。快速多极子方法在粗糙面电磁散射问题中应用时,首先类似普通矩量法将粗糙面均分为 N 段,即 N 个子散射体,并按照它们在 x 轴上的位置均分为 G 组,即每组包含的段数为 $M=N/G$,并且每组内子散射体只直接作用于一个固定的"集线器"[8]。图 3.12 给出了粗糙面上子散射体的分组示意图,其中,矩量法中直接相互作用的场点 $\boldsymbol{r}_m$ 和源点 $\boldsymbol{r}_n$ 分别用 m 和 n 替代,场点 m 所在组 $G_{l'}$ 对应的"集线器"位置为 $\boldsymbol{r}_{l'}$,并用字母 l' 表示,源点 n 所在组 G_l 对应的"集线器"位置为 $\boldsymbol{r}_l$,并用字母 l 表示,$G_{l'+1}$ 和 $G_{l'-1}$ 分别为与 $G_{l'}$ 相邻的两个组。

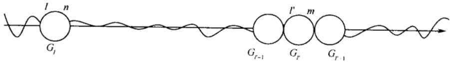


图 3.12　粗糙面上子散射体分组示意图

根据加法定理可以得到当 $r_{ml'}<r_{l'l}$ 和 $r_{nl}<r_{ml}$ 时,零阶 Hankel 函数及其法向导数可以展开为下面的求和形式[8]:

$$
\begin{aligned}
H_0^{(1)}(kr_{mn}) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(kr_{ml'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_1(\phi_{ml'}-\pi)} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} H_{m_1-n_1}^{(1)}(kr_{l'l})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m_1-n_1)\phi_{l'l}} J_{n_1}(kr_{ln})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_1\phi_{ln}} \\
\frac{\partial H_0^{(1)}(kr_{mn})}{\partial n_n} &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(kr_{ml'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_1(\phi_{ml'}-\pi)} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} H_{m_1-n_1}^{(1)}(kr_{l'l})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m_1-n_1)\phi_{l'l}} \frac{\partial J_{n_1}(kr_{ln})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_1\phi_{ln}}}{\partial n_n}
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

其中,$\phi_{\alpha\beta}$ 表示从 α 点指向 β 点的矢量与 x 轴正方向之间的夹角,$r_{\alpha\beta}=|\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta|$ 表示 α 点与 β 点之间的距离。对式(3.60)的第二重求和进行截断处理,可以得到

$$
\begin{aligned}
H_0^{(1)}(kr_{mn}) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(k\rho_{ml'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_1(\phi_{ml'}-\pi)} \sum_{n_1=m_1-P}^{m_1+P} H_{m_1-n_1}^{(1)}(k\rho_{l'l})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m_1-n_1)\phi_{l'l}} J_{n_1}(kr_{ln})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_1\phi_{ln}} \\
\frac{\partial H_0^{(1)}(kr_{mn})}{\partial n_n} &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(k\rho_{ml'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_1(\phi_{ml'}-\pi)} \sum_{n_1=m_1-P}^{m_1+P} H_{m_1-n_1}^{(1)}(k\rho_{l'l})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m_1-n_1)\phi_{l'l}} \frac{\partial J_{n_1}(kr_{ln})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_1\phi_{ln}}}{\partial n_n}
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

而贝塞尔函数可以表示为平面波的叠加,

$$
J_{m_1}(kr_{ml'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_1\phi_{ml'}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{ml'}\cos(\alpha-\phi_{ml'})+\mathrm{i}m_1(\alpha-\pi/2)}\right] \tag{3.62a}
$$

$$
J_{n_1}(kr_{ln})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_1\phi_{ln}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha'\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{ln}\cos(\alpha'+\phi_{ln})+\mathrm{i}n_1(\alpha'-\pi/2)}\right] \tag{3.62b}
$$

将上面的贝塞尔函数的积分表达式(3.62a)和式(3.62b)代入到式(3.61)中,定义

$p=n_1-P$,改变求和次序,并利用 $\frac{1}{2\pi}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_1(\alpha+\alpha')}=\Lambda(\alpha+\alpha')$,其中,$\Lambda$ 表示狄拉克函数,则零阶 Hankel 函数及其法向导数可以简化为

$$
\begin{aligned}
H_0^{(1)}(kr_{mn}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha\widetilde{\beta}_{ml'}(\alpha)\widetilde{\alpha}_{l'l}(\alpha)\widetilde{\beta}_{ln}(\alpha) \\
\frac{\partial H_0^{(1)}(kr_{mn})}{\partial n_n} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha\widetilde{\beta}_{ml'}(\alpha)\widetilde{\alpha}_{l'l}(\alpha)\frac{\partial\widetilde{\beta}_{ln}(\alpha)}{\partial n_n}
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

其中,

$$
\widetilde{\alpha}_{l'l}(\alpha)=\sum_{p=-P}^{P}H_p^{(1)}(k\rho_{l'l})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(\phi_{l'l}-\alpha+\pi/2)} \tag{3.64a}
$$

$$
\widetilde{\beta}_{ml'}(\alpha)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_{ml'}\cos(\alpha-\phi_{ml'})},\quad \widetilde{\beta}_{ln}(\alpha)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_{ln}\cos(\alpha-\phi_{ln})} \tag{3.64b}
$$

$$
\frac{\partial\widetilde{\beta}_{ln}(\alpha)}{\partial n_n}=[\mathrm{i}k(n_{x_n}\cos\alpha+n_{z_n}\sin\alpha)]\widetilde{\beta}_{ln}(\alpha) \tag{3.64c}
$$

其中,n_{x_n} 和 n_{z_n} 分别是源点 $\boldsymbol{r}_n$ 处的单位法矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}_n$ 在 x 方向和 z 方向的分量。

3.2.2 快速多极子方法在导体粗糙面电磁散射中的应用

从 3.1 节中可以知道,利用矩量法可以将积分方程(3.17)、式(3.29)分别离散为矩阵方程(3.27)和式(3.31),阻抗矩阵元素 A_{mn},B_{mn} 的具体表达式分别为式(3.26)和式(3.30),并且阻抗矩阵元素是一个仅与零阶 Hankel 函数或其法向导数有关的变量。从矩量法的矩阵方程(3.27),式(3.31)中可以看出,矩量法在选择源点位置时并没有区分,即对于场点来说任意位置的源点在矩阵元素生成时的地位都是相同的。但对快速多极子方法而言,矩阵元素生成时源点的位置有远区、近区之分。对于任意一个组 $G_{l'}$,定义它的近区组为 $NG_{l'}$,远区组为 $FG_{l'}$,并且远区组与近区组之间的关系为 $FG_{l'}=G-NG_{l'}$,从图 3.12 中可以看出 $NG_{l'}$ 由其自身组与左右临近组组成,即 $NG_{l'}=G_{l'-1}+G_{l'}+G_{l'+1}$,则来自于粗糙海面上均分的 N 段上的所有源点的作用可以表示为 $b_m=Nb_m+Fb_m$,其中,Nb_m 表示近区作用。

如果源点 n 满足 $n\in G_l$ 且 $G_l\in NG_{l'}$,则源点 n 与场点 m 之间的作用,即近区作用,仍采用矩量法计算,即

$$
\begin{aligned}
Nb_m &= \sum_{l\in NG_{l'}}\sum_{n\in G_l}A_{mn}U_n,\quad m\in G_{l'},\mathrm{HH} \\
Nb_m &= \sum_{l\in NG_{l'}}\sum_{n\in G_l}B_{mn}\psi_n,\quad m\in G_{l'},\mathrm{VV}
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

如果源点 n 满足 $n\in G_l$ 且 $G_l\in FG_{l'}$,则源点 n 与场点 m 之间的作用,即远区作用,可以通过引入零阶 Hankel 函数及其法向导数的积分表达式(3.63)表示为

$$Fb_m = \frac{\mathrm{i}\Delta x}{8\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \widetilde{\beta}_{ml'}(\alpha) \sum_{\substack{l \in FG_{l'} \\ l=1}}^{N/M} \widetilde{\alpha}_{l'l}(\alpha) \sum_{n \in G_l} \widetilde{\beta}_{ln}(\alpha) U_n, \quad m \in G_{l'}, \mathrm{HH}$$

$$Fb_m = -\frac{\mathrm{i}\Delta x}{8\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \widetilde{\beta}_{ml'}(\alpha) \sum_{\substack{l \in FG_{l'} \\ l=1}}^{N/M} \widetilde{\alpha}_{l'l}(\alpha) \sum_{n \in G_l} \gamma_n \frac{\partial \widetilde{\beta}_{ln}(\alpha)}{\partial n_n} \psi_n, \quad m \in G_{l'}, \mathrm{VV} \tag{3.66}$$

且 $\gamma_n = \sqrt{1+f'(x_n)^2}$。将式(3.66)中$[0, 2\pi]$的积分用 Q 点的求和表示，即 $\mathrm{d}\alpha = \Delta q = 2\pi/Q$，则

$$Fb_m = \frac{\mathrm{i}\Delta x}{4Q} \sum_{q=1}^{Q} \widetilde{\beta}_{ml'}(\alpha_q) \sum_{\substack{l \in FG_{l'} \\ l=1}}^{N/M} \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{l'l}(\alpha_q) \sum_{n \in G_l} \widetilde{\beta}_{ln}(\alpha_q) U_n, \quad m \in G_{l'}, \mathrm{HH}$$

$$Fb_m = -\frac{\mathrm{i}\Delta x}{4Q} \sum_{q=1}^{Q} \widetilde{\beta}_{ml'}(\alpha_q) \sum_{\substack{l \in FG_{l'} \\ l=1}}^{N/M} \widetilde{\alpha}_{l'l}(\alpha_q) \sum_{n \in G_l} \gamma_n \frac{\partial \widetilde{\beta}_{ln}(\alpha_q)}{\partial n_n} \psi_n, \quad m \in G_{l'}, \mathrm{VV}$$

(3.67)

其中，$\widetilde{\alpha}_{l'l}(\alpha_q)$为一个对角矩阵。最后，矩量法矩阵方程(3.27)和式(3.31)可以转化为下面的快速多极子矩阵方程：

$$\sum_{l \in NG_{l'}} \sum_{n \in G_l} A_{mn} U_n + \frac{\mathrm{i}\Delta x}{4Q} \sum_{q=1}^{Q} \widetilde{\beta}_{ml'}(\alpha_q) \sum_{\substack{l \in FG_{l'} \\ l=1}}^{N/M} \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{l'l}(\alpha_q) \sum_{i \in G_l} \widetilde{\beta}_{ln}(\alpha_q) U_n = b_m$$

$$m \in G_{l'}, \mathrm{HH}, \quad l' = 1, 2, \cdots, N/M$$

$$\sum_{l \in NG_{l'}} \sum_{n \in G_l} B_{mn} \psi_n - \frac{\mathrm{i}\Delta x}{4Q} \sum_{q=1}^{Q} \widetilde{\beta}_{ml'}(\alpha_q) \sum_{\substack{l \in FG_{l'} \\ l=1}}^{N/M} \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{l'l}(\alpha_q) \sum_{i \in G_l} \gamma_n \frac{\partial \widetilde{\beta}_{ln}(\alpha_q)}{\partial n_n} \psi_n = b_m$$

$$m \in G_{l'}, \mathrm{VV}, \quad l' = 1, 2, \cdots, N/M \tag{3.68}$$

1. 计算量与储存量

上面的矩阵方程(3.68)可以写成矩阵形式为

$$[\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}_{NN} + \overline{\overline{\boldsymbol{A}}}_{FF}] \cdot \bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{b}} \tag{3.69}$$

其中，$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}_{NN}$为近区作用矩阵，$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}_{FF}$为远区作用矩阵且是通过聚合—转移—解聚三个过程实现，分别以聚合矩阵$\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}$、转移矩阵$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}$和解聚合矩阵$\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}$表示，则远区作用矩阵$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}_{FF}$可表示为

$$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}_{FF} = \overline{\overline{\boldsymbol{U}}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{T}}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{V}}} \tag{3.70}$$

1）近区作用矩阵$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}_{NN}$

由近区组的特性可知近区作用矩阵元素主要集中在主对角线附近，具体表示形式为

$$\bar{\bar{A}}_{NN}=\begin{bmatrix}\bar{\bar{A}}_{11} & \bar{\bar{A}}_{12} & 0 & \cdots & 0 & \bar{\bar{A}}_{1G}\\ \bar{\bar{A}}_{21} & \bar{\bar{A}}_{22} & \bar{\bar{A}}_{23} & & & 0\\ 0 & \bar{\bar{A}}_{32} & \bar{\bar{A}}_{33} & \bar{\bar{A}}_{34} & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \vdots & \bar{\bar{A}}_{G-2G-1} & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & \bar{\bar{A}}_{G-1G-1} & \bar{\bar{A}}_{G-1G}\\ \bar{\bar{A}}_{G1} & 0 & \cdots & 0 & \bar{\bar{A}}_{GG-1} & \bar{\bar{A}}_{GG}\end{bmatrix} \tag{3.71}$$

其中，不为零的矩阵$\bar{\bar{A}}_{mn}$是一个 $M\times M$ 的满阵，所以，近区作用矩阵$\bar{\bar{A}}_{NN}$是一个$N\times N$的稀疏矩阵，非零元素的个数是 $3GM^2$。

2）远区作用矩阵$\bar{\bar{A}}_{FF}$

由式(3.70)可知远区作用矩阵是由聚合矩阵$\bar{\bar{V}}$、转移矩阵$\bar{\bar{T}}$和解聚合矩阵$\bar{\bar{U}}$共同组成的，因此，在下面的内容中将分别讨论聚合矩阵$\bar{\bar{V}}$、转移矩阵$\bar{\bar{T}}$和解聚合矩阵$\bar{\bar{U}}$。

（1）聚合矩阵$\bar{\bar{V}}$。从快速多极子的矩阵方程(3.67)可以知道聚合矩阵$\bar{\bar{V}}$可以表示为

$$\bar{\bar{V}}=\begin{bmatrix}\bar{\bar{V}}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \bar{\bar{V}}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{V}}_G\end{bmatrix} \tag{3.72}$$

其中，$\bar{\bar{V}}_l$ 是一个 $Q\times M$ 的矩阵，当 HH 极化入射时其元素为$\bar{\bar{V}}_l(q,n)=\tilde{\beta}_{ln}(\alpha_q)\Delta x$，当 VV 极化入射时其元素为$\bar{\bar{V}}_l(q,n)=\gamma_n\dfrac{\partial\tilde{\beta}_{ln}(\alpha_q)}{\partial n_n}\Delta x$，所以，聚合矩阵$\bar{\bar{V}}$是一个$GQ\times GM$的块对角稀疏矩阵，非零元素的个数为 GQM。

（2）转移矩阵$\bar{\bar{T}}$。转移矩阵表示 G 个组之间的相互作用，因此，转移矩阵$\bar{\bar{T}}$是一个 $G\times G$ 的块满阵，表达形式为

$$\bar{\bar{T}}=\begin{bmatrix}\bar{\bar{T}}_{11} & \bar{\bar{T}}_{12} & \cdots & \bar{\bar{T}}_{1G}\\ \bar{\bar{T}}_{21} & \bar{\bar{T}}_{22} & \cdots & \bar{\bar{T}}_{2G}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \bar{\bar{T}}_{G1} & \bar{\bar{T}}_{G2} & \cdots & \bar{\bar{T}}_{GG}\end{bmatrix} \tag{3.73}$$

需要注意的是转移矩阵$\bar{\bar{T}}$讨论的是远区组之间的关系，因此，可以知道近区作用部分的$\bar{\bar{T}}_{l'l}=0$，矩阵$\bar{\bar{T}}_{l'l}$表示的辐射角α_q之间的相互作用，而只有相同的辐射角之间才有作用，因此，矩阵$\bar{\bar{T}}_{l'l}$是一个$Q\times Q$的对角阵。

$$\bar{\bar{T}}_{l'l}=\begin{bmatrix}\bar{\bar{T}}_{l'l}(\alpha_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \bar{\bar{T}}_{l'l}(\alpha_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\bar{T}}_{l'l}(\alpha_Q)\end{bmatrix}\tag{3.74}$$

所以，转移矩阵是一个$GQ\times GQ$的稀疏矩阵，非零元素的个数是G^2Q。

(3) 解聚合矩阵$\bar{\bar{U}}$。解聚合矩阵$\bar{\bar{U}}$与聚合矩阵$\bar{\bar{V}}$类似，也是一个块对角矩阵，具体表达形式为

$$\bar{\bar{U}}=\begin{bmatrix}\bar{\bar{U}}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \bar{\bar{U}}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\bar{U}}_G\end{bmatrix}\tag{3.75}$$

其中，$\bar{\bar{U}}_{l'}$是一个$M\times Q$的满阵，其元素为$\bar{\bar{U}}_{l'}(m,q)=\tilde{\beta}_{ml'}(\alpha_q)$，所以解聚合矩阵$\bar{\bar{U}}$是一个$GM\times GQ$的稀疏矩阵，非零元素的个数为$GMQ$。

表 3.1 给出了快速多极子方法中各矩阵大小与各步骤计算量，在计算中常取$M\approx\sqrt{N}$，$Q\approx 2M$，通过表 3.1 可以发现快速多极子方法的计算量和储存量为$O(N^{1.5})$，与矩量法的$O(N^2)$相比，快速多极子方法在计算电大尺寸电磁散射问题中的优势是明显的。

表 3.1　各矩阵的大小与各步骤计算量

	近区	聚合	转移	解聚	总和
运算量	$3GM^2$	GQM	G^2Q	GMQ	$3GM^2+GQ(G+2M)$
储存量	$3GM^2$	GQM	G^2Q	GMQ	$3GM^2+GQ(G+2M)$

2. 数值结果及分析

在下面的数值结果中，以 PM 海面为例，假定入射波的频率$f=1.57542\text{GHz}$，即讨论的入射波是 GPS 的 L1 波段。粗糙海面的长度$L=623.986\text{m}$，粗糙海面均分的段数为$N=32768$，单位波长采样点数是 10 个。在下面的数值结果中，双站散射系数定义式为式(3.52)和式(3.53)。

图 3.13 给出了锥形入射波的入射电磁波幅值在掠入射情况下的分布，其中，锥形波因子为 $g=L/4$，入射角为 $\theta_i=85°$，海面风速分别为 $U_{19.5}=5\text{m/s}$(图 3.13(a))和 $U_{19.5}=10\text{m/s}$(图 3.13(b))。从图 3.13 中可以很明显地看到即使在掠入射情况下，入射电磁波的幅值 $|\psi^{inc}|$ 在截断边缘处依然能够减小为零，消除了人为截断误差，从而保证了以下计算结果的正确性。

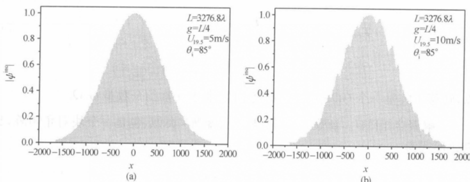


图 3.13　粗糙海面掠入射时入射电场幅值分布示意图

为了说明快速多极子方法的有效性，图 3.14 给出了分别采用矩量法和快速多极子方法计算的电磁波掠入射下粗糙海面的双站散射系数曲线。由于矩量法的限制，模拟的粗糙面长度为 $L=819.2\lambda$，每个波长 10 个采样点，入射角为 $\theta_i=80°$，图 3.14(a)、(b)中海面风速分别为 $U_{19.5}=5\text{m/s}$ 和 $U_{19.5}=10\text{m/s}$，采用 10 个粗糙面样本进行统计。从图 3.14 中可以明显地发现 HH 极化入射时快速多极子方法的计算结果与矩量法的结果在整个散射角范围内吻合得很好，VV 极化入射时在大部分散射角范围内也都是吻合的，这表明在粗糙面掠入射问题中快速多极子方法是一种高效精确的计算方法。

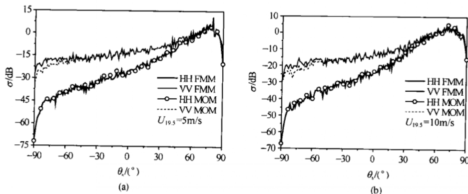


图 3.14　分别采用快速多极子方法和矩量法计算的双站散射系数

表 3.2 给出了采用快速多极子方法和矩量法在计算时间和内存需求方面的比较，其中，HH 极化对应图 3.14(a)中的计算情况，VV 极化为图 3.14(b)的计算条件。程序运行环境为：CPU，Intel Pentium，2.0GHz；内存：2.0GB。从表 3.2 中可以看出，快速多极子方法大大降低了计算时间，同时内存需求量也降低了。

表 3.2 快速多极子方法和矩量法在计算时间和内存需求方面的对比

极化	方法	计算时间/s	计算时间的对比/%	内存需求/MB	内存需求对比/%
HH	FMM	776	7.07	144	14.06
	MOM	10976		1024	
VV	FMM	539	10.92	144	14.06
	MOM	4935		1024	

图 3.15 分别给出了入射角为 $\theta_i=85°$时，不同风速粗糙海面在两种极化电磁波入射下的散射系数角分布图，其中，粗糙面样本个数为 50 个。从图 3.15(a)中可以很明显地看出在镜向方向上，海面风速越小，双站散射系数越大，而在非镜向上，风速小的海面的散射系数明显得小于风速大的海面，这是因为海面的高度起伏与海面风速有关，风速越大的海面粗糙度越大，散射中的非相干散射分量越多。从

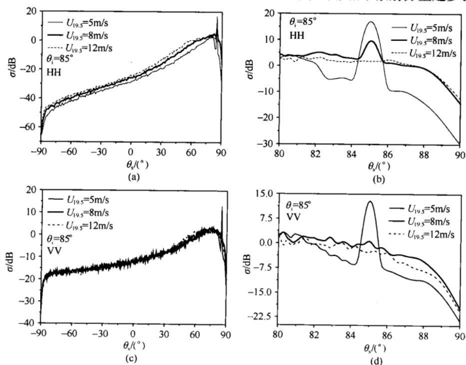


图 3.15 不同极化下不同风速海面的散射系数

图 3.15(b)和 3.15(d)中可以很明显地看出镜向方向上及非镜向方向上散射系数的变化，风速为 12m/s 时在镜向方向上峰值几乎消失了。对比图 3.15(a)和 3.15(c)可以发现在远离镜向方向上，风速对 VV 极化入射时散射系数的影响很小，不同风速下的散射系数几乎不变。

3.2.3 快速多极子方法在介质粗糙面电磁散射中的应用

从 3.1 节可以得到电磁波入射到介质粗糙面时对应的积分方程为式(3.54a)和式(3.54b)，利用矩量法可以离散积分方程为矩阵方程(3.56a)和式(3.56b)，其中，阻抗矩阵元素 A_{mn}，B_{mn}，$A_{mn}^{(1)}$，$B_{mn}^{(1)}$ 的具体表达式为式(3.26)、式(3.30)、式(3.57a)和式(3.57b)，同样可以知道阻抗矩阵元素仅与零阶 Hankel 函数或其法向导数有关，因此，可以利用式(3.63)简化矩阵方程得到快速多极子方程。需要注意的是介质粗糙面时的阻抗矩阵元素是由 HH 极化和 VV 极化入射到理想导体粗糙面的阻抗矩阵元素 A_{mn}，B_{mn} 及下半空间的阻抗矩阵元素 $A_{mn}^{(1)}$，$B_{mn}^{(1)}$ 组成的，因此，可以将介质粗糙面的矩阵方程分为 4 块并分别进行快速多极子计算，本节内容就是基于这一思想，通过分块矩阵的思想分别生成阻抗矩阵元素，在利用共轭梯度求解矩阵方程时也通过矩阵分块的思想实现介质粗糙面的快速多极子运算。

在图 3.16 中给出分别利用矩量法和快速多极子方法计算电磁波入射到介质粗糙面的双站散射系数的角分布曲线，其中，入射波频率依然为 GPS 入射频率 $f=1.57542\text{GHz}$，模拟的粗糙面长度为 $L=409.6\lambda$，每个波长 10 个采样点，入射角为 $\theta_i=75°$，粗糙海面的风速为 $U_{19.5}=5\text{m/s}$，相对介电常数为 $\varepsilon_1=(72.45,57.27)$，数值结果为 15 个粗糙面样本的统计结果。从图 3.16 中可以很明显地看出在整个散射角范围内，快速多极子方法的计算结果与矩量法的计算结果吻合得很好，这说明了快速多极子方法在计算粗糙面掠入射散射问题中是一种精确的计算方法，同时通过前面导体粗糙面数值结果的分析可以知道，快速多极子方法大大降低了内存的需求。

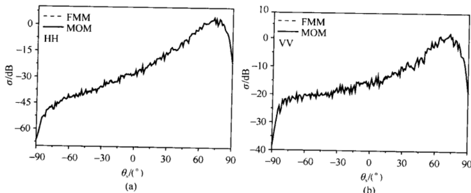


图 3.16 采用快速多极子方法和矩量法计算的介质粗糙面的双站散射系数比较

3.3　FDTD研究一维粗糙面的电磁散射

3.3.1　FDTD 的基本原理

Maxwell 方程是支配一切宏观电磁现象的一组基本方程，它存在着微分和积分两种形式，而 FDTD 基本迭代式是用 Yee 元胞对微分形式的 Maxwell 方程进行离散的数值结果。它形式简单、直观、易于理解，因而在计算电磁学领域中得到了越来越广泛的应用。

Maxwell 旋度方程[9]的时域表示形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J}\tag{3.76a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}\tag{3.76b}$$

其中，$\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为电场强度(V/m)、电通量密度(C/m^2)、磁场强度(A/m)和磁通量密度(Wb/m^2)，$\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$ 分别为电流密度和磁流密度，它们均是时间和空间的函数。在各向同性介质中的本构关系为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}=\sigma_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H}\tag{3.77}$$

ε 表示介电常数(F/m)，μ 表示磁导系数(H/m)，σ 表示电导率(S/m)，σ_{m} 表示导磁率(Ω/m)。在直角坐标系中，式(3.76)写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_z}{\partial y}-\dfrac{\partial H_y}{\partial z}=\varepsilon\dfrac{\partial E_x}{\partial t}+\sigma E_x\\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z}-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=\varepsilon\dfrac{\partial E_y}{\partial t}+\sigma E_y\\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x}-\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial t}+\sigma E_z\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=-\mu\dfrac{\partial H_x}{\partial t}-\sigma_m H_x\\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=-\mu\dfrac{\partial H_y}{\partial t}-\sigma_m H_y\\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=-\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial t}-\sigma_m H_z\end{cases}\tag{3.78}$$

对式(3.78)中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的各个直角分量关于时间和空间的一阶偏导数取中心差分近似，应用这种离散方式就可以得到时域 Maxwell 方程的差分形式。

从空间上看，FDTD 离散中电场和磁场各节点的空间排布满足 Yee 元胞，如图 3.17 所示。由图可见每一个磁场分量由 4 个电场分量环绕，而每个电场分量由 4 个磁场分量环绕，这种电磁场分量的空间取样方式不仅符合法拉第电磁感应定律和安培环路定理的自然结构，而且空间相对位置也适于 Maxwell 方程的差分计算，能够恰当地描述电磁场的传播特性。在时间上，电场和磁场彼此相差半个时间步，使 Maxwell 旋度方程

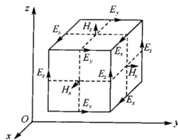


图 3.17　FDTD 离散中的 Yee 元胞

离散以后构成显式差分方程。

3.3.2 FDTD 在一维粗糙面电磁散射中的应用

一维粗糙面的电磁散射是一个二维散射问题。设式(3.76)中所有物理量与 z 坐标无关，即$\frac{\partial}{\partial z}=0$，则可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_z}{\partial y}=\varepsilon\dfrac{\partial E_x}{\partial t}+\sigma E_x\\-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=\varepsilon\dfrac{\partial E_y}{\partial t}+\sigma E_y\\\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=-\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial t}-\sigma_{\mathrm{m}}H_z\end{cases},\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}=-\mu\dfrac{\partial H_x}{\partial t}-\sigma_{\mathrm{m}}H_x\\-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=-\mu\dfrac{\partial H_y}{\partial t}-\sigma_{\mathrm{m}}H_y\\\dfrac{\partial H_y}{\partial x}-\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial t}+\sigma E_z\end{cases}\tag{3.79}$$

二维情况下电磁场的直角分量[10]分为两组，E_x,E_y,H_z 为一组，称为 TE 波(HH 极化)；H_x,H_y,E_z 为一组，称为 TM 波(VV 极化)。运用中心差分近似，对 TM 波在时间和空间上进行差分离散可得

$$E_z^{n+1}(i,j)=CA(m)E_z^n(i,j)+CB(m)$$
$$\times\left[\frac{H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-H_y^{n+1/2}\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{\Delta x}-\frac{H_x^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-H_x^{n+1/2}\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y}\right]\tag{3.80}$$

$$H_x^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=CP(m)H_x^{n-1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-CQ(m)\frac{E_z^n(i,j+1)-E_z^n(i,j)}{\Delta y}\tag{3.81}$$

$$H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=CP(m)H_y^{n-1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right)+CQ(m)\frac{E_z^n(i+1,j)-E_z^n(i,j)}{\Delta x}\tag{3.82}$$

式(3.80)～式(3.82)中的系数 $CA(m)$，$CB(m)$，$CP(m)$，$CQ(m)$分别为

$$CA(m)=\frac{1-\dfrac{\sigma(m)\Delta t}{2\varepsilon(m)}}{1+\dfrac{\sigma(m)\Delta t}{2\varepsilon(m)}},\qquad CB(m)=\frac{\dfrac{\Delta t}{\varepsilon(m)}}{1+\dfrac{\sigma(m)\Delta t}{2\varepsilon(m)}}\tag{3.83}$$

$$CP(m)=\frac{1-\dfrac{\sigma_m(m)\Delta t}{2\mu(m)}}{1+\dfrac{\sigma_m(m)\Delta t}{2\mu(m)}},\qquad CQ(m)=\frac{\dfrac{\Delta t}{\mu(m)}}{1+\dfrac{\sigma_m(m)\Delta t}{2\mu(m)}}\tag{3.84}$$

其中，系数中的标号 m 代表观察点(x,y)处的一组整数或者半整数，在式(3.80)中 $m=(i,j)$，式(3.81)中 $m=\left(i,j+\frac{1}{2}\right)$，式(3.82)中 $m=\left(i+\frac{1}{2},j\right)$。$\Delta x$ 和 Δy 分

别是x和y方向的空间步长，Δt是时间步长。为了满足离散Maxwell方程的稳定性和收敛性条件，时间和空间离散间隔的关系为[10] $\Delta x=\Delta y=\Delta=\lambda/20$，$\Delta t=0.5\times\Delta/c$，$c$是光在真空中传播的速度。对于TE波的差分公式可由下面的对偶关系得到：

$$\begin{cases}\varepsilon\rightarrow\mu,\sigma\rightarrow\sigma_{\mathrm{m}}\\ \mu\rightarrow\varepsilon,\sigma_{\mathrm{m}}\rightarrow\sigma\\ \boldsymbol{E}\rightarrow\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}\rightarrow-\boldsymbol{E}\end{cases}\tag{3.85}$$

在FDTD求解散射问题中，连接边界、吸收边界和外推边界的处理构成了FDTD方法的三大核心问题。对于粗糙面散射问题计算区域的划分[9]如图3.18所示，其中，图3.18(a)、(b)的差别在于吸收边界的不同。图3.18(a)采用Mur吸收边界，图3.18(b)采用UPML吸收边界。三大边界的功能分别为首先连接边界将计算区域划分为总场区和散射场区，另外应用惠更斯原理，在连接边界处设置入射波，使入射波的加入变得简单易行；在吸收边界处设置吸收边界条件，可以利用有限计算区域模拟无界空间中的电磁问题；根据等效原理，可以将输出边界处的近区域场实现远场的外推计算，下面将对这三个边界进行详细研究。

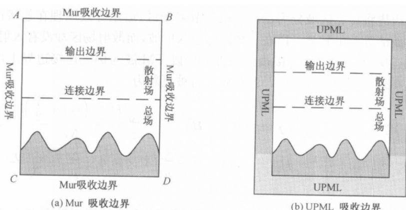


图3.18 粗糙面散射计算中FDTD区域的划分

1. 连接边界

以二维TM波为例。设平面波入射方向与y轴的夹角为θ_i，并以入射方向为y'轴建立$x'y'z'$坐标系，如图3.19所示。平面入射波采用一维FDTD随时间逐步推进方式[10]，得到y'方向上一系列样点上的入射波电场$E_i^n(p)(p=0,1,2,\cdots)$，所采取的离散间隔Δt，Δy与二维FDTD所取的时间和空间间隔相同，那么连接边界上任意一点(i,j)在入射方向y'轴上的投影为

$$y_1=i\Delta x\sin\theta_i-j\Delta y\cos\theta_i\tag{3.86}$$

y_1 可能并不对应一维 FDTD 的样本点位置，即 $y_1=(p+w)\Delta y$，其中，p 为整数，w $(0<w<1)$ 为小数，利用线性差值公式得到连接边界上节点 (i,j) 的入射电场为

$$E'_z=(1-w)E_i^n(p)+wE_i^n(p+1) \tag{3.87}$$

同理，入射磁场可以表示为

$$H'_x=(1-w)H_i^n(p)+wH_i^n(p+1) \tag{3.88}$$

那么在 xyz 坐标系中，

$$\begin{cases} E_{z,i}(i,j)=E'_z \\ H_{x,i}\left(i,j+\dfrac{1}{2}\right)=-H'_x\cos\theta_i \end{cases} \tag{3.89}$$

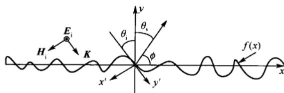


图 3.19　连接边界上的点在平面波入射方向上的投影

连接边界将计算区域分为总场区域和散射场区，运用等效原理在连接边界上设置入射波的等效电磁流可以在总场区引进入射波，而散射场区却没有入射波，这样必须在连接边界上设置连接边界条件。仍以 TM 波为例。连接边界上的有限差分公式在式(3.80)～式(3.82)的基础上将被更新为

$$E_z^{n+1}(i,j)=E_z^n(i,j)+\frac{\Delta t}{\varepsilon}[\nabla\times\boldsymbol{H}]_z^{n+1/2}-\frac{\Delta t}{\varepsilon}\frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \tag{3.90}$$

$$H_x^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=H_x^{n-1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-\frac{\Delta t}{\mu}[\nabla\times\boldsymbol{E}]_x^n-\frac{\Delta t}{\mu}\frac{E_{z,i}^n(i,j)}{\Delta y} \tag{3.91}$$

与前面矩量法引入锥形波一样，在利用 FDTD 方法计算粗糙面电磁散射时，必须引入高斯窗函数[11]

$$G(x,y)=\exp\left\{-\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]\left(\frac{\cos\theta_i}{T}\right)^2\right\} \tag{3.92}$$

其中，x_0 和 y_0 是连接边界中心的空间坐标，T 是一个决定窗函数宽度的常数，当窗函数在连接边界边缘处下降为中心点处值的 10^{-3} 时，满足 $\cos\theta_i/T=2.6/\rho_m$，$\rho_m$ 表示从连接边界中心点到边缘的最小距离。

2. 吸收边界

由于计算机容量的限制，FDTD 的计算只能在有限区域中进行。为了能模拟

开域的电磁过程,在计算区域的截断边界处必须给出吸收边界条件。到目前为止,吸收边界从开始为简单的插值研究,到后来广泛采用的 Mur 吸收边界,以及近些年发展的 PML 吸收边界、UPML 吸收边界、CPML 吸收边界,其吸收效果越来越好。这里简单介绍 Mur 和 UPML 两种吸收边界。

对于图 3.18(a)中的 Mur 吸收边界而言,左边界 AC 和下边界 CD 的有限差分公式为[12]

$$
\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i_{AC},j)=&E_z^n(i_{AC}+1,j)+\frac{c\Delta t-\Delta}{c\Delta t+\Delta}[E_z^{n+1}(i_{AC}+1,j)-E_z^n(i_{AC},j)]\\
&-\frac{c^2\mu\Delta t}{2(c\Delta t+\Delta)}\Big[H_x^{n+1/2}\Big(i_{AC},j+\frac{1}{2}\Big)-H_x^{n+1/2}\Big(i_{AC},j-\frac{1}{2}\Big)\\
&+H_x^{n+1/2}\Big(i_{AC}+1,j+\frac{1}{2}\Big)-H_x^{n+1/2}\Big(i_{AC}+1,j-\frac{1}{2}\Big)\Big]
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

$$
\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i,j_{CD})=&E_z^n(i,j_{CD}+1)+\frac{c\Delta t-\Delta}{c\Delta t+\Delta}[E_z^{n+1}(i,j_{CD}+1)-E_z^n(i,j_{CD})]\\
&+\frac{c^2\mu\Delta t}{2(c\Delta t+\Delta)}\Big[H_y^{n+1/2}\Big(i+\frac{1}{2},j_{CD}\Big)-H_y^{n+1/2}\Big(i-\frac{1}{2},j_{CD}\Big)\\
&+H_y^{n+1/2}\Big(i+\frac{1}{2},j_{CD}+1\Big)-H_y^{n+1/2}\Big(i-\frac{1}{2},j_{CD}+1\Big)\Big]
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

这里将式(3.93)作下列替换:$i_{AC}\rightarrow i_{BD}$,$i_{AC}+1\rightarrow i_{BD}-1$,即可得到右边界 BD 的差分公式。同理,将式(3.94)作下列替换:$j_{CD}\rightarrow j_{AB}$,$j_{CD}+1\rightarrow j_{AB}-1$,即可得到上边界 AB 的差分公式。对于 A,B,C 和 D 四个角点的差分公式,式(3.93)和式(3.94)将不能被采用,这主要由于计算区域外的点将被引入,所以它们的差分公式将被单独给出。那么,角点 C 的差分公式为

$$
E_z^n(i_C,j_C)=\Big(1-\frac{\sqrt{2}c\Delta t}{\Delta}\Big)E_z^{n-2}(i_C,j_C)+\frac{\sqrt{2}c\Delta t}{\Delta}E_z^{n-2}(i_C+1,j_C+1)
\tag{3.95}
$$

其他角点的差分公式与角点 C 类似,这里不再给出。

最初由 Sacks(1995)和 Gedney(1996)提出的单轴各向异性吸收介质——UPML [13],它与 Berenger 的 PML 场分量分裂理论不同,在单轴各向异性介质中,电磁波仍满足 Maxwell 方程,所以只要设置合适的单轴参数,UPML 吸收介质中的差分方程对整个 FDTD 计算区域都是适用的。仍以 TM 波为例,在 UPML 吸收介质中法拉第定律和安培定理分别表示为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial E_z}{\partial y}=\mathrm{i}\omega\mu_1\dfrac{s_y}{s_x}H_x\\
\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=-\mathrm{i}\omega\mu_1\dfrac{s_x}{s_y}H_y
\end{cases}
\tag{3.96}
$$

$$
\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=(-\mathrm{i}\omega\varepsilon_1+\sigma_1)s_xs_yE_z
\tag{3.97}
$$

其中，ε_1，μ_1 和 σ_1 分别代表图 3.18(b)中与 UPML 层相邻的内部介质的介电系数、磁导系数和电导率，s_x 和 s_y 是沿着 x 和 y 方向的单轴参数[13]，$s_x=\kappa_x-\sigma_x/\mathrm{i}\omega\varepsilon_0$，$s_y=\kappa_y-\sigma_y/\mathrm{i}\omega\varepsilon_0$。在式(3.96)中，引入中间变量 B_x 和 B_y，$B_x=\mu_1 H_x/s_x$，$B_y=\mu_1 H_y/s_y$；在式(3.97)中，引入中间变量 P'_z 和 P_z，$P'_z=s_y s_x E_z$，$P_z=P'_z/s_x$。运用时频转换关系 $-\mathrm{i}\omega\to\partial/\partial t$，磁场可由 $E_z\to B_x,B_y\to H_x,H_y$ 的时间推进计算公式得到

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}=-\kappa_y\frac{\partial B_x}{\partial t}-\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0}B_x \tag{3.98a}$$

$$\kappa_x\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0}B_x=\mu_1\frac{\partial H_x}{\partial t} \tag{3.98b}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\kappa_x\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0}B_y \tag{3.99a}$$

$$\kappa_y\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0}B_y=\mu_1\frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{3.99b}$$

同理，在不考虑磁损耗的情况下，电场可由 $H_x,H_y\to P'_z\to P_z\to E_z$ 的时间推进计算公式得到

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\varepsilon_1\frac{\partial P'_z}{\partial t}+\sigma_1 P'_z \tag{3.100a}$$

$$\frac{\partial P'_z}{\partial t}=\kappa_x\frac{\partial P_z}{\partial t}+\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0}P_z \tag{3.100b}$$

$$\frac{\partial P_z}{\partial t}=\kappa_y\frac{\partial E_z}{\partial t}+\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0}E_z \tag{3.100c}$$

运用中心差分近似，式(3.98)～式(3.100)的 FDTD 形式为

$$B_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=\frac{\kappa_y(m)/\Delta t-\sigma_y(m)/2\varepsilon_0}{\kappa_y(m)/\Delta t+\sigma_y(m)/2\varepsilon_0}B_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-\frac{1/\Delta y}{\kappa_y(m)/\Delta t+\sigma_y(m)/2\varepsilon_0}\times\left(E_z^n(i,j+1)-E_z^n(i,j)\right) \tag{3.101}$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)+\frac{\kappa_x(m)/\Delta t+\sigma_x(m)/2\varepsilon_0}{\mu_1/\Delta t}B_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-\frac{\kappa_x(m)/\Delta t-\sigma_x(m)/2\varepsilon_0}{\mu_1/\Delta t}B_x^{n-1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) \tag{3.102}$$

$$B_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=\frac{\kappa_x(m)/\Delta t-\sigma_x(m)/2\varepsilon_0}{\kappa_x(m)/\Delta t+\sigma_x(m)/2\varepsilon_0}B_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)+\frac{1/\Delta x}{\kappa_x(m)/\Delta t+\sigma_x(m)/2\varepsilon_0}\left(E_z^n(i+1,j)-E_z^n(i,j)\right) \tag{3.103}$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)+\frac{\kappa_y(m)/\Delta t+\sigma_y(m)/2\varepsilon_0}{\mu_1/\Delta t}B_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-\frac{\kappa_y(m)/\Delta t-\sigma_y(m)/2\varepsilon_0}{\mu_1/\Delta t}B_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right) \tag{3.104}$$

$$P'^{n+1}_z(i,j)=\frac{\varepsilon_1(m)/\Delta t-0.5\sigma_1(m)}{\varepsilon_1(m)/\Delta t+0.5\sigma_1(m)}P'^{n}_z(i,j)+\frac{1}{\varepsilon_1(m)/\Delta t+0.5\sigma_1(m)}$$
$$\times\Big[\frac{1}{\Delta x}\Big(H^{n+\frac{1}{2}}_y\Big(i+\frac{1}{2},j\Big)-H^{n+\frac{1}{2}}_y\Big(i-\frac{1}{2},j\Big)\Big)$$
$$-\frac{1}{\Delta y}\Big(H^{n+\frac{1}{2}}_x\Big(i,j+\frac{1}{2}\Big)-H^{n+\frac{1}{2}}_x\Big(i,j-\frac{1}{2}\Big)\Big)\Big]\tag{3.105}$$

$$P^{n+1}_z(i,j)=\frac{\kappa_x(m)/\Delta t-\sigma_x(m)/(2\varepsilon_0)}{\kappa_x(m)/\Delta t+\sigma_x(m)/(2\varepsilon_0)}P^{n}_z(i,j)+\frac{1/\Delta t}{\kappa_x(m)/\Delta t+\sigma_x(m)/(2\varepsilon_0)}$$
$$\times[P'^{n+1}_z(i,j)-P'^{n}_z(i,j)]\tag{3.106}$$

$$E^{n+1}_z(i,j)=\frac{\kappa_y(m)/\Delta t-\sigma_y(m)/(2\varepsilon_0)}{\kappa_y(m)/\Delta t+\sigma_y(m)/(2\varepsilon_0)}E^{n}_z(i,j)+\frac{1/\Delta t}{\kappa_y(m)/\Delta t+\sigma_y(m)/(2\varepsilon_0)}$$
$$\times[P^{n+1}_z(i,j)-P^{n}_z(i,j)]\tag{3.107}$$

3. 输出边界

由于 FDTD 只能计算有限区域的散射场，要得到远区的散射场必须运用等效原理对输出边界上的数据实现近-远场外推。输出边界上的外推公式为[9]

$$\boldsymbol{E}^s=\hat{z}\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\mathrm{i}k_0}{2\pi r}}\exp(\mathrm{i}k_0r)(-\eta_0f_z-f_{mx}\sin\phi)\tag{3.108}$$

k_0 为入射波数，$k_0=|\boldsymbol{K}|$（图 3.19），r 表示从参考坐标原点到远区观察点处的距离，η_0 为自由空间的波阻抗，ϕ 表示散射方向和 x 轴的夹角，$\phi=90°-\theta_s$，θ_s 是散射角，如图 3.19 所示，f_z 和 f_{mx} 表示输出面上的电流矩和磁流矩

$$f_z=-\Delta x\sum_i H_x\Big(i,j+\frac{1}{2}\Big)\exp\Big\{-\mathrm{i}k_0\Big[\Big(j+\frac{1}{2}\Big)\sin\phi\Delta y+i\cos\phi\Delta x\Big]\Big\}\tag{3.109}$$

$$f_{mx}=-\Delta x\sum_i E_z(i,j)\exp[-\mathrm{i}k_0(j\sin\phi\Delta y+\mathrm{i}\cos\phi\Delta x)]\tag{3.110}$$

将式(3.109)和式(3.110)代入式(3.108)，得到远区的散射场，进而可得到远区的雷达散射系数。

4. 数值计算及结果分析

为了验证 FDTD 方法计算粗糙面散射的正确性，图 3.20 中运用 FDTD 方法计算了 VV 极化下一维高斯导体和介质粗糙面的双站散射系数，并与 MOM 的计算结果进行了比较。这里取入射频率 $f=0.3$GHz，粗糙面的长度 $L=180\lambda$，UPML 介质层的厚度为 5Δ，入射角为 20°，粗糙面样本为 20 个，粗糙面的均方根高度和相关长度分别为 $\delta=0.2\lambda$，$l=1.5\lambda$，介质粗糙面的相对介电常数为(2.5，0.18)。由图 3.20 可以看出，无论是导体粗糙面还是介质粗糙面，由 FDTD 方法计算的双站散射系数在整个散射角范围内与 MOM 的结果具有很好的一致性。

图 3.21 中分别运用 FDTD 和 MOM 计算了 VV 极化时不同入射角下一维 PM 海面的双站散射系数角分布[14]，图中入射频率为 $f=1.0\text{GHz}$，海面的长度为 $L=204.8\lambda$，海水的介电常数为(72.0,84.0)，海面上风速为 $U_{19.5}=5\text{m/s}$，粗糙面样本数为 20 个。由图中同样可以发现两种方法的结果在整个散射角范围内吻合较好。

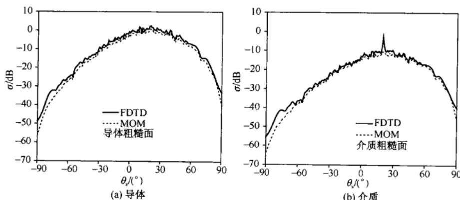


图 3.20　一维高斯粗糙面双站散射系数 FDTD 方法与 MOM 方法的比较

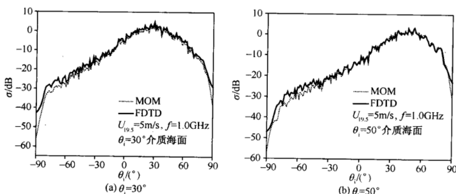


图 3.21　一维 PM 海面双站散射系数 FDTD 方法与 MOM 方法的比较

3.4　TDIE 研究一维粗糙面瞬态散射特性

近几十年来，随着脉冲技术在微波与毫米波通信、雷达、遥感等领域的广泛应用，与脉冲有关的瞬态电磁场(又称时域电磁场)的研究已引起人们极大的重视。而粗糙表面的时域脉冲电磁散射算法可以给出各取样时刻的空间场分布，从而能清楚地看出粗糙表面的电磁散射场随时间演变的过程。长期以来，时域问题的研究更多采用的是微分方程法(如 FDTD)，其原因是易于编程实现。本节首先将时域积分方程法[15]引入二维导体目标的瞬态散射的计算中，并将计算结果与相关文

献的结果进行比对。在此基础上，利用其求解了随机导体粗糙面的瞬态电磁散射，计算了高斯脉冲波照射下，粗糙面中心点的电流随时间的响应及电场远场响应，并将计算结果与经典的 MOM-IDFT 进行了比对，验证了其有效性。

3.4.1 TDIE 的基本原理

TDIE 是利用格林函数和边界条件建立时域积分方程，然后把空间变量的积分区域和时间变量都离散化，将积分方程化为线性方程组，按时间步进的方式进行递推，逐步求出各时间步的响应值。其空间变量仍采用 3.1 节中的矩量法，而时间变量则采用差分法，分为隐式(implicit)和显式(explicit)两种方法。两者的区别在于前者时间步的选取与空间离散尺度无关。与 FDTD 相比，TDIE 有两个明显的优点：一是只需对所求目标进行离散，从而大大降低未知量个数；二是不需要吸收边界条件，也降低了计算量。

如图 3.22 所示，z 轴表示二维目标无限长方向，考虑电场极化方向为 z 方向的瞬态波照射到二维导体目标时，目标表面的感应电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 只有 z 方向且沿 z 方向不变，目标外任意一点处的散射场可表示为

$$\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\nabla\phi(\boldsymbol{r},t) \tag{3.111}$$

其中，磁矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 和电位势 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 分别为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_S\frac{1}{R}\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}s' \tag{3.112}$$

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S\frac{1}{R}\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}s' \tag{3.113}$$

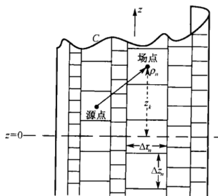


图 3.22• TDIE 二维网格划分示意图

式(3.112)积分内的电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t)$ 为面电流，而非线电流。由于 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t)$ 只有 z 方向且沿 z 方向不变，所以 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$。又由电流连续性方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\partial\rho/\partial t=0$ 可知

$\rho=0$,因此 $\phi(r,t)=0$。这样,式(3.111)变为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{3.114}$$

考虑入射场,二维导体外的总场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.115}$$

在导体表面,应满足电场切向分量为零,那么可以得到时域电场积分方程的表达式为

$$[\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r},t)]_{\tan}=\left[\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right]_{\tan} \tag{3.116}$$

如图 3.22 所示,时域积分方程法在处理二维问题(曲线 C)时,将其当成三维问题来处理,网格剖分时通常采用最简单的正方形网格。由于将二维问题进行三维化处理,因此,表面电流密度为面密度(频域 MOM 处理二维导体目标的电流密度为线电流密度,这是 TDIE 和 MOM 在处理二维目标散射问题的本质区别)。采用 pulse 基函数,假设在每个面元内电流密度不变,由于在 z 方向电流无变化,所以尽管有无穷多个面元,但未知电流系数却只有有限个,即为二维边界 C 的分段数。把一维粗糙面的轮廓或二维目标横截面可看成如图 3.22 中所示的二维边界 C(xy 平面内),将该二维边界分为 N 段,再以每段的长度 $\Delta\tau_n$ 为基准,沿 z 方向剖分正方形网格(不同段内的正方形边长通常不一样),所有剖分的面元关于 $z=0$ 对称。第 n,k 个面元的中心就位于边界 ρ_n 处,并距离 $z=0$ 为 z_k 处,其中,$z_k=k\Delta z_n=k\Delta\tau_n$。

1. 电流基函数及内积的定义

由于将二维散射问题三维化了,所以表面电流密度为面密度,采用 pulse 基函数,假设在每个面元内电流密度不变,由于在 z 方向电流无变化,所以尽管有无穷多个面元,但未知量——电流展开系数却只有有限个,其数量为边界的分段数 N。电流基函数定义如下:

$$j_n(\boldsymbol{\rho})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{\rho}\in \text{第 } n \text{ 段}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{3.117}$$

$\boldsymbol{\rho}$ 在 xy 平面内变化。导体表面电流可展开为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\rho},t)=\hat{z}\sum_{n=1}^{N} I_n(t)j_n(\boldsymbol{\rho}) \tag{3.118}$$

定义内积为

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}s \tag{3.119}$$

注意:S 是沿 z 轴方向的整个导体表面,所以为无穷大。

2. MOT 方程

对式(3.116)两边积分,可将微分算子去掉并得到

$$\boldsymbol{A}_{\tan}(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t \boldsymbol{E}_{\tan}^{\text{inc}}(\boldsymbol{r},\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.120}$$

由于在 $\hat{z}$ 方向场量不变,故以下 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 用 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho},t)$ 表示。用检验电流函数 $\boldsymbol{w}_m=\hat{z}j_m$ 对式(3.120)两边作内积可得

$$\langle \hat{z}j_m,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho},t)\rangle=\langle \hat{z}j_m,\int_0^t \boldsymbol{E}_{\tan}^{\text{inc}}(\boldsymbol{\rho},\tau)\mathrm{d}\tau\rangle \tag{3.121}$$

内积积分区域虽然为无穷大,但沿 $\hat{z}$ 方向积分变量值不变,所以面积分实际上是沿二维边界 C 的积分,假定在第 m 段内 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho},t)$ 的值不变,并且将 $\boldsymbol{\rho}$ 固定在第 m 段的中点,由式(3.112),式(3.117)及式(3.118)可得

$$A(\boldsymbol{\rho}_m,t_j)=\frac{\mu}{4\pi}\int_C\int_{z'=-\infty}^{\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}I_n(t_j-R_m/c)j_n(\boldsymbol{\rho}')}{R_m}\mathrm{d}z'\mathrm{d}c' \tag{3.122}$$

其中,R_m 为两个面元中心点之间的距离,

$$R_m=\sqrt{|\boldsymbol{\rho}_m-\boldsymbol{\rho}'|^2+z'^2} \tag{3.123}$$

注意:式(3.122)将面积分转化为了两个线积分——沿 $\hat{z}$ 轴和沿目标边界 C,并且作了近似,即认为在正方形面元内 $I_n(t_j-R_m/c)$ 不变,即有

$$A(\boldsymbol{\rho}_m,t_j)=\frac{\mu}{4\pi}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}I_n\left(t_j-\frac{R_{mnk}}{c}\right)F_{mnk} \tag{3.124}$$

其中,

$$R_{mnk}=\sqrt{|\boldsymbol{\rho}_m-\boldsymbol{\rho}'_n|+(k\Delta\tau_n)^2} \tag{3.125}$$

$$F_{mnk}=\int_{\Delta S_{nk}}\frac{1}{R_m}\mathrm{d}s' \tag{3.126}$$

对于式(3.126)的计算分两种情况。当两面元(面元 m 和面元 n)重合时,这里使用文献[16]介绍的方法对 F_{mnk} 进行计算,即

$$F_{mnk}=\begin{cases}\dfrac{(\Delta\tau_n)^2}{\sqrt{|\boldsymbol{\rho}_m-\boldsymbol{\rho}'_n|+(k\Delta\tau_n)^2}}, & m\neq n \text{ 或 } k\neq 0\\ 4\Delta\tau_n\ln(1+\sqrt{2}), & m=n \text{ 且 } k=0\end{cases} \tag{3.127}$$

对于显式格式,时间步长应满足 Courant 准则 $c\Delta t<\Delta R_{\min}/\sqrt{2}$,这说明如果 $R_{\min}\neq 0$,则一定有

$$t_j-\frac{R_{mnk}}{c}<t_{j-1} \tag{3.128}$$

则式(3.124)可以表示为

$$A(\boldsymbol{\rho}_m,t_j)=\frac{\mu}{4\pi}F_{mn0}I_m(t_j)+\frac{\mu}{4\pi}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}I_n\left(t_j-\frac{R_{mnk}}{c}\right)F_{mnk}\big|_{m\neq n,k\neq 0}$$
$$=\frac{\mu}{4\pi}F_{mn0}I_m(t_j)+\widetilde{A}(\boldsymbol{\rho}_m,t_j) \tag{3.129}$$

其中，$\widetilde{A}(\boldsymbol{\rho}_m,t_j)$表示去除了 $m=n$ 且 $k=0$ 的项。将式(3.129)代入式(3.120)可得

$$\frac{\mu}{4\pi}F_{mn0}I_m(t_j)=\int_0^{t_j}E^{\text{inc}}(\boldsymbol{\rho},\tau)\mathrm{d}\tau-\widetilde{A}(\boldsymbol{\rho}_m,t_j) \tag{3.130}$$

式(3.130)左边只含 $I_m(t_j)$，右边只含 j 以前的时间步，无需矩阵求逆，根据 j 以前的时间步计算出 $I_m(t_j)$，将 m 遍历，可获得第 j 时间步的所有采样段的电流。

隐式格式的时间步长选取不需要满足 Courant 准则，所以式(3.129)右边第二项会出现如下情况：

$$t_{j-1}\leqslant t_j-\frac{R_{mnk}}{c}<t_j \tag{3.131}$$

令 $t_R=t_j-\dfrac{R_{mnk}}{c}$，而 $I_n(t_R)$的计算应当既考虑 $I_n(t_j)$又考虑 $I_n(t_{j-1})$，在此作插值处理

$$I(t_R)=\left[\frac{R_{mnk}}{c\Delta t}\right]I_n(t_{j-1})+\left[1-\frac{R_{mnk}}{c\Delta t}\right]I_n(t_j) \tag{3.132}$$

当 R_{mnk}满足式(3.131)时，将 $I(t_R)$都按式(3.132)处理，

$$A(\boldsymbol{\rho}_m,t_j)=A'(\boldsymbol{\rho}_m,t_j)+\frac{\mu}{4\pi}\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=-P}^{P}\left[\frac{R_{mnk}}{c\Delta t}\right]I_n(t_{j-1})F_{mnk}$$
$$+\frac{\mu}{4\pi}\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=-P}^{P}\left[1-\frac{R_{mnk}}{c\Delta t}\right]I_n(t_j)F_{mnk} \tag{3.133}$$

式(3.133)中 $A(\boldsymbol{\rho}_m,t_j)$代表除前面两项外余下的项，显然，$A'(\boldsymbol{\rho}_m,t_j)$中只含有 $I_n(t_{j-1})$及更早时间步的电流系数。将 $A(\boldsymbol{\rho}_1,t_j)$，$A(\boldsymbol{\rho}_2,t_j)$，…，$A(\boldsymbol{\rho}_n,t_j)$联立起来，形成一个 N 维线性方程组，解方程组便一次性求出了 N 个 $I(t_j)$，该线性方程组可以用矩阵的形式表示为

$$[\alpha][I(t_j)]=[\beta] \tag{3.134}$$

其中，α 由式(3.133)等号右边第一项计算，β 由式(3.133)等号右边第二、三项及式(3.130)等号右边第一项计算。式(3.134)便为隐式格式的时间步进方程。

在求出 N 个 $I(t_j)$后，利用式(3.118)可求出表面电流的时间响应 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\rho},t_j)$，继而从二维自由空间时域格林函数出发，根据已知电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\rho},t_j)$可以求得瞬态远场[17]

$$\sqrt{\rho}\boldsymbol{E}^{s}(\boldsymbol{\rho},t_j)=-\sqrt{\rho}\,\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho},t_j)}{\partial t}=-\sqrt{\rho}\,\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho},t_{j+1})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho},t_{j-1})}{2\Delta t} \tag{3.135}$$

其中，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho},t_j)$满足

$$\sqrt{\rho}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho},t_j)=\frac{\mu}{2\pi\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\Delta\tau_n\sum_{k=1}^{j-t_{n0}}-2\boldsymbol{J}_n(t_k)(\sqrt{a-ct_k}-\sqrt{a-ct_{k-1}}) \tag{3.136}$$

$t_{n0}=(\rho-\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\boldsymbol{\rho}_n)/c$ 为远场响应的延迟时间。$a=ct_j-\rho+\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\boldsymbol{\rho}_n$，$t_k=\Delta t\cdot k$，$\boldsymbol{J}_n(t_k)$为时间步 $t_{k-1}\rightarrow t_k$ 内的电流，ρ_n 为源点，ρ 为场点。

3. 数值结果与讨论

本节数值结果分别以导体条带、圆柱为例，利用 TDIE 方法计算二维目标的瞬态电磁散射，并将计算结果与 MOM-IDFT 方法及相关参考文献结果进行比较，验证了其可靠性，为下面将其用于粗糙面及其与上方目标瞬态复合电磁散射奠定了基础。入射波采用如图 3.23 所示的二维高斯脉冲平面波[18]，其表达式如下：

$$\boldsymbol{E}^{\text{inc}}(\boldsymbol{\rho},t)=\hat{z}E_0\frac{4.0}{\sqrt{\pi}T}\exp\left(-\left[\frac{4.0}{T}(ct-ct_0-\boldsymbol{\rho}\cdot\hat{\boldsymbol{k}})\right]^2\right)\tag{3.137}$$

其中，$\boldsymbol{E}_0=120\pi$，高斯脉冲宽度 $T=4$LM（时间单位：光米，1LM 表示光走过 1m 所用的时间），脉冲延迟 $ct_0=6$LM。

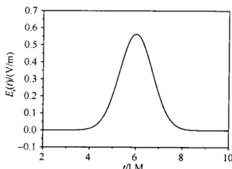


图 3.23　高斯脉冲波时域图

以下算例中给出了分别利用 TDIE 及 MOM-IDFT 方法计算电流响应及电场远场相应结果，同时给出文献[18]的结果进行比较，其中，TDIE 采用隐式步进格式，时间间隔为 $\Delta t=0.6$LM。MOM-IDFT 的频率取样范围为 0～1.2GHz，抽样 2048 个点。

算例一　图 3.24 和图 3.25 给出了高斯脉冲波照射 1.0m 宽的二维金属条带时，条带中心点电流和电场远场的时间响应，其中，$\hat{\boldsymbol{k}}=-\hat{\boldsymbol{x}}$，金属条带被剖分为 9 段。

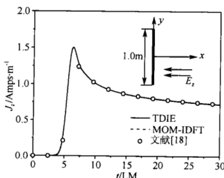


图 3.24　高斯脉冲波照射金属条带时条带中心点的电流响应

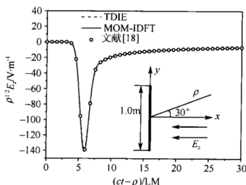


图 3.25　高斯脉冲平面波照射到金属条带时电场远场响应

算例二 图 3.26 和图 3.27 给出了高斯脉冲波照射半径 1.0m 的金属圆柱时，圆柱上迎着入射波中心点电流和电场远场的时间响应，其中，圆柱被划分 48 段，可以看出，TDIE 计算结果与文献[18]及 MOM-IDFT 方法的结果吻合很好。

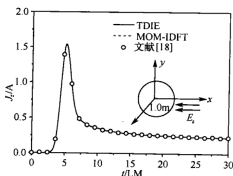


图 3.26 高斯脉冲波照射金属圆柱时正对入射波中心点的电流响应

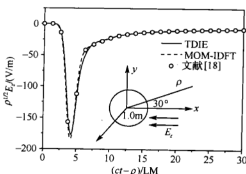


图 3.27 高斯脉冲平面波照射到金属圆柱时电场远场响应

3.4.2 TDIE 在一维粗糙面瞬态电磁散射中的应用

本节在前面的理论基础上将 TDIE 用于求解一维粗糙面的瞬态散射。图 3.28 为一维粗糙面散射示意图，仍考虑电场极化方向沿 $\hat{z}$ 方向的瞬态波(HH)入射到高度起伏为 $y=f(x)$ 的随机粗糙面上。在建模中，所产生的粗糙面为一系列随机点 $f(x_i)$，x_i 为 x 轴上的等间隔取样点。将相邻的点连起来，形成许多线段，这些线段，在三维空间则表现为无限长的金属条带，如图 3.29 所示。用上节的方法对粗糙面进行网格剖分，粗糙面上的随机点 x_n，x_{n+1} 即构成第 n 段网格。

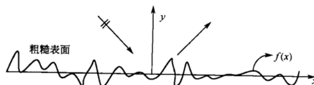


图 3.28 一维粗糙表面散射示意图

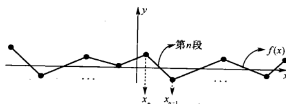


图 3.29 TDIE 计算粗糙面瞬态散射建模示意图

在有关粗糙面电磁散射的数值计算中，为了保证在粗糙面边缘电流的连续性，使用锥形入射波[3]，这里使用高斯锥形脉冲波，其表达式为

$$\boldsymbol{E}^{\text{inc}}(\boldsymbol{\rho},t)=\hat{z}E_0\frac{4.0}{\sqrt{\pi}T}\exp\left(-\left[\frac{4.0}{T}(ct-ct_0-\boldsymbol{\rho}\cdot\hat{k})\right]^2\right)\exp\left(-\left[\frac{g}{L}(\boldsymbol{\rho}\cdot\hat{x}-x_0)\right]^2\right) \tag{3.138}$$

式(3.138)实际是在高斯脉冲波的基础上，加了窗函数 $G(x)=\exp\left(-\left[\frac{g}{L}(\boldsymbol{\rho}\cdot\hat{x}-x_0)\right]^2\right)$。对于一般的高斯平面波而言，严格满足 Maxwell 方程，对于加窗后的锥形波，只要窗函数足够大，在研究区域内锥形波与平面波一样满足波动方程，具体可参见文献[3]。L 为所计算的粗糙面的总长度，x_0 为粗糙面的中心点，g 为锥形波衰减因子，g 越大，在粗糙面的边缘处入射场越小，如果要求在边缘处入射场衰减到 β，g 的取值应为 $2\sqrt{-\ln\beta}$。式(3.138)保证了在粗糙面的边缘，入射电场接近零，从而使得边缘处感应电流接近零，避免了电流的不连续性。图 3.30 给出了锥形波的场强变化示意图。

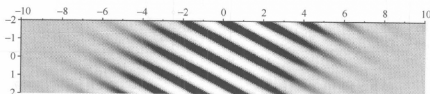
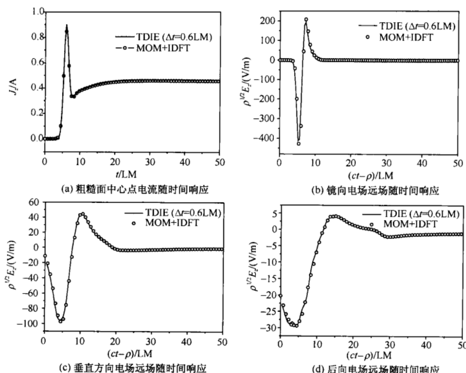


图 3.30　锥形波场强变化示意图

在以下数值计算中，均以 HH 极化波(电场极化方向沿 $\hat{z}$ 方向)为例，其中，取高斯脉冲宽度为 $T=4\text{LM}$，脉冲峰值 $ct_0=6\text{LM}$，$E_0=120\pi$。

为了验证 TDIE 方法的准确性，如图 3.31 所示，分别采用 TDIE 和 MOM-IDFT 方法计算了高斯粗糙面中心点的电流、镜向、垂直方向、后向电场远场随时间响应的结果，其中，高斯脉冲波入射角为 45°，粗糙面总长度 $L=25.6\text{m}$，粗糙面被剖分为 256 段，每段 $\Delta L=0.1\text{m}$，粗糙面相关长度 $l=0.35\text{m}$，均方根高度 $\delta=0.05\text{m}$，矩量法结合 Fourier 逆变换方法(MOM-IDFT)中，频率取样 0～480MHz，采样 2048 个点。粗糙面样本数 10 个。可以发现，两种方法计算结果吻合得很好。

图 3.32 给出了不同入射角下高斯粗糙面中心点处的电流及电场远场随时间的响应，其中，入射角分别为 30°，45°和 60°。粗糙面参数同图 3.31。可以看出，电场远场响应的幅值随着入射角的增大明显减小[19]。

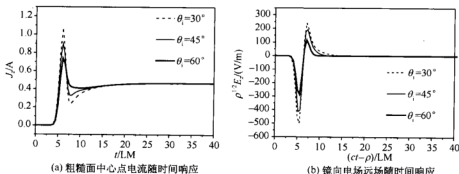


(a) 粗糙面中心点电流随时间响应　(b) 镜向电场远场随时间响应

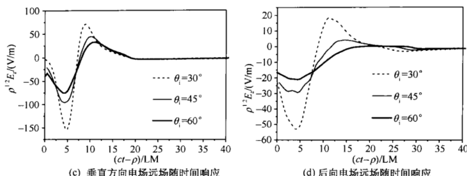
(c) 垂直方向电场远场随时间响应　(d) 后向电场远场随时间响应

图 3.31　粗糙面电流及电场远场随时间响应

图 3.33 为粗糙面在不同均方根高度下，TDIE 计算的粗糙面镜向及后向电场远场随时间的响应，其中，粗糙面的均方根高度分别为 $\delta=0.025\text{m}$，0.05m 和 0.075m，其他参数同图 3.31。可以看出，均方根高度的变化对于镜向方向的电场远场影响较为明显，而对于后向电场远场影响不大。

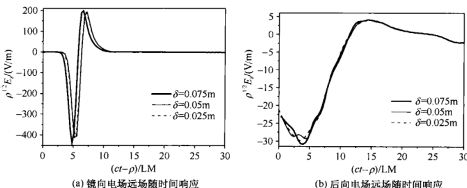


(a) 粗糙面中心点电流随时间响应　(b) 镜向电场远场随时间响应



(c) 垂直方向电场远场随时间响应　(d) 后向电场远场随时间响应

图 3.32　不同入射角下高斯粗糙面中心点处的电流及电场远场随时间响应



(a) 镜向电场远场随时间响应　(b) 后向电场远场随时间响应

图 3.33　不同均方根高度下，粗糙面电场远场随时间响应

3.5　粗糙面电磁散射并行数值计算方法

3.5.1　并行计算基本知识

对于电大尺度粗糙面和电大尺寸目标的电磁散射计算，即使综合采用高效数值方法，算法需要的计算量和储存量仍然太大，以至于在单台微机上不能实现。而对于现代雷达使用的工作频率，对于实际粗糙地面、海面和几乎所有的飞行体目标都是电大尺寸的，这将导致大规模的数值计算量和储存量要求，因此，需要进行并行计算。

并行计算是使用多于一个 CPU 处理单元或计算机来协同工作解决问题的计算模式[20]。并行计算结构可以是上千个处理器组成的大型并行计算机，也可以是由普通的以太网连接的两台以上的 PC 机组成的集群或是由 Internet 上一些计算单元组成的虚拟的超级计算机，其中，网络并行计算能够充分利用现有的计算资源和储存资源，以提高计算效率。随着工作站和微机性能价格比的日益提高，以及高速网络产品的陆续问世，一种新的并行计算系统应运而生，为大运算量、大储存量

要求的算法提供了实现的可能性。美国国家工程科学院院士、加州大学柏克莱分校的 Paterson 教授称之为工作站网络(network of workstation,NOW),也称集群(clusters)。这种系统将一群工作站用网络以某种结构互联起来,充分利用各工作站资源,统一调度、协调处理,以实现高效并行计算[21]。

在 NOW 出现之前有三类典型的并行处理系统。第一类为多向量处理机系统;第二类为基于共享储存器的多处理机系统;第三类是基于分布式储存器的大规模并行处理系统(massively parallel processing,MPP);NOW 算作第四类,其实也是一种分布式并行计算系统,如图 3.34 所示。

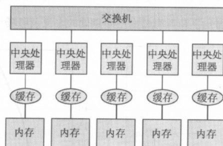


图 3.34　分布式并行计算系统示意图

前三类由于专用性强,研制经费高,商业售价昂贵等原因,在推广时受到一定的限制。相反,由于 VLSI 技术的发展,作为 NOW 组成元素的工作站或高性能微机,其性能以每年 50%的速度提高,而价格不断下降,使人们看到 NOW 推广应用的曙光,图 3.35 给出了利用高性能 PC 机搭建的 NOW 并行计算平台。IEEE-SSS (scientific super computing subcommitee)将 NOW 作为它的一个焦点,并作了大量研究,认为 NOW 是并行计算领域的一个重大发展,可能成为并行计算的主导方向。在工作站参与运算时,希望整个系统用尽量少的节点,在尽量少的运行时间内完成任务,以获得较高的加速比和效率,NOW 系统的运行时间由工作站计算时间和网络的数据通信时间组成。因此,组成 NOW 的工作站和互联网络的性能都是影响 NOW 性能的因素。

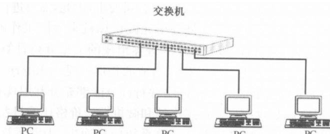


图 3.35　基于高性能 PC 集群的 NOW 分布式并行计算系统示意图

由于工作站的性能较高且还在迅速提高，所以负责数据通信的互联网络是一项关键技术。异步传输模式（ATM）等高速网络技术的发展给了 NOW 强大的支持。此外，千兆以太网络产品已经商业化，百兆以太网络产品价格持续降低，这也推动了 NOW 的发展。伴随高速网络而产生的另一个关键技术是工作站到网络的主机接口的设计，增加高速缓存和采用 DMA 数据传送方式是两种可供选择的技术。总之，高带宽、低延迟的互联网络技术是 NOW 发展的关键技术，近来在国际会议上，这类技术，如 ICPP，Hot Internet Connects 等，都成为热点问题。

当然并行计算的发展还离不开软件的支持。这些软件主要包括以下几类：

(1) 并行程序专用设计环境（平台），它提供用户使用并行硬件资源的编译环境。目前，较为通用软件平台有 MPI（message passing interface），Express，PVM（parallel virtual machine），Linda，P4 等。

(2) 可视化监视/调试器，便于用户进行长时间计算时，可随时看到任务运行情况。

(3) 并行图形处理。

(4) 并行文件系统和数据库。

并行应用程序的编写一般有两种方法：一是直接进行并行数值计算研究，并编写运行于并行系统的并行程序；二是由传统串行计算方法出发，将其改编成并行计算方法，进一步把串行程序改编为并行程序。针对专用并行机的并行数值算法比较成熟，但大多数没有把实际中必须的通信开销计算在内，即算法没有考虑处理机之间数据的传输、交换等问题，这对 NOW 系统来说是不太适用的，NOW 更倾向于第二种做法。目前，并行计算在计算电磁学领域已经引起了各国重视。

对于 NOW 这种并行系统，是一种分布式并行计算的新型系统，代表了并行计算的新发展方向。它可以将不同操作系统、不同体系结构以及不同计算能力的计算机相连，形成高性能的并行计算系统。根据指令流和数据流的方式不同，将并行计算机一般系统分为如下 4 类：单指令单数据流（single instruction stream & single data stream，SISD）、单指令多数据流（single instruction stream & multipole data stream，SIMD）、多指令单数据流（multipole instruction stream & single data stream，MISD）、多指令多数据流（multipole instruction stream & multipole data stream，MIMD）。

在 MIMD 并行系统中，每个处理器都是独立的，每个单元都可以运行不同的程序，处理机之间采用高速网络通信进行数据共享和同步。MIMD 又可分为共享式储存器模式（PRAM）和分布式储存器模式。目前大部分并行机都是分布式储存器模型。在分布式储存模式中，每个处理器都有自己独立的可直接访问的内存，每个结点之间通过高速网络交换数据和信息，节点之间的连接方式有总线结构、环状结构、Mesh 结构和超立方结构等。通常，每个处理器单元可以有多个处理器组

成，其中，某些处理器用于管理和数据输出。分布式储存器也成为消息传递模式，处理单元可向某一地址或某些地址处理单元发送各类消息，接收单元将消息保存在缓存器中并通知目的任务。

3.5.2 基于消息传递的并行计算

在分布式内存的并行机中，消息传递是一种广泛使用的分布式计算程序结构模型。按照这种模型，一个程序被划分成几个子程序分别在各个结点上运行，并通过相互传递消息来保证整个程序的协调和同步。在分布式并行计算系统中由于各处理机之间通过计算机网络进行连接，处理机之间没有共享内存供数据传递。因而，分布式并行计算机系统中通过传递消息的通信机制来完成各处理机之间的数据传递操作。在并行设计环境中，依据处理机之间的消息传递机制为程序员提供不同模式和多层次的系统通信原语，以方便灵活地通过此环境进行并行程序设计，完成并行计算任务。

消息传递通信系统是围绕消息(message)的概念来建立的。在并行程序设计环境中，一个消息即是由一个发送数据操作 SEND 所产生的结果，其中，数据为一些没有结构定义的字节流。每个消息由一个接收操作 RECEIVE 来消耗。如果消息字节数大于读取所需要的字节数，则多余的字节将被删掉；反之，则 RECEIVE 将接收所有此消息的字节，同时返回消息字节数不够的指示。

在并行程序设计环境中提供了多种模式及多种层次的系统通信程序包，其中，按通信机制的不同，主要分为阻塞(blocking)通信和非阻塞(non-blocking)通信两类。

(1) 阻塞通信。阻塞通信机制主要指当调用此通信原语时，用户程序将被挂起直到相应的操作完成为止。如果是发送一数据，则数据被从用户空间拷贝到系统消息缓冲区，等待系统根据发送目的节点地址，选择占用相应的通信链路。将数据从系统缓冲区发送出去之后，用户程序才能调用才能返回，接着完成后面的操作。如果是接收一数据，则在用户调用此通信系统原语之后，直到在本节点系统消息缓冲区中有相应类型的消息到达之后，该调用函数才能返回，同时，将消息从系统接收消息缓冲区拷贝到用户程序空间。

(2) 非阻塞通信。对于非阻塞通信，接收节点将消息进行缓冲，以等待相应的读取操作取走数据消息。在并行程序设计环境的消息传递系统中，还提供了对于非阻塞通信机制的支持，以满足消息立即处理的消息驱动需要。通常应用程序可以设置一个处理进程(exhandle)用于处理接收到的消息，而另一部分程序可以继续完成其他的并行计算，以及处理其他来源的通信消息，它不会像阻塞通信那样在调用时被挂起。

在基于消息传递的通信过程中，同步问题比较复杂，因为常常要考虑缓冲的时

延。消息传递分为同步和异步两大类,前者需要等待接收者的应答后继续,后者不需要等待接收者的应答。

(1) 同步消息传递。在这种通信方式中,接收进程接收到的消息能反映进程的当前状态。

(2) 异步消息传递。利用发送和接收命令,可以在任意的时刻实现同步要求。由于发送进程一般先于接收进程,因此,接收进程接收到的消息不能反映发送进程的当前状态。

并行计算的性能指标为并行加速比与并行效率。

(1) 并行加速比。设 t_p 表示用 $p(p=1,2,3,\cdots)$ 个处理器求解某问题所需时间。定义 p 个处理器的加速比为

$$S_p = \frac{t_1}{t_p} \tag{3.139}$$

(2)并行效率。并行效率与加速比是相关的概念。一个并行程序的效率定义为

$$E_p = \frac{S_p}{p} \tag{3.140}$$

当加速比 S_p 接近于 p 时,效率 E_p 接近于1。

1. 编程平台

为了完成网络并行计算,消息传递的并行计算平台的选择十分重要。消息传递编程是一种显示编程,大多数系统使用 SEND 和 RECEIVE 函数来交换数据。目前,已经存在许多通用且成熟的消息传递软件包,其中,MPI 和 PVM 是两种比较成熟的软件包。

2. MPI 简介

消息传递接口(message passing interface,MPI)[22]是为 MIMD 模式分布式储存器并行计算机和机群系统制定的消息标准,目标是为这类机器建立一个可移植、易使用的标准消息传递环境。MPI 提供一个独立于平台的消息传递库标准,实现程序可移植性,支持 PC 机、工作站和几乎所有的并行机,用 MPI 编写的程序可以不加修改地应用于所有操作系统平台。

MPI 包含 125 个函数和宏组成的库,但仅需要调用以下 6 个基本函数即可完成基本应用:MPI 初始化、MPI 结束、确定消息传递通道的大小、确定消息传递通道的序号、消息发送给指定的处理机、从指定处理机接收消息。MPI 有如下特征:

(1) 实现方式多样化,同一编程界面可有多种开发工具。

(2) 能实现完全的异步通信,立即发送和接收与计算覆盖进行。

(3) 能有效地管理消息缓存区。

(4) 能在 MPP 与工作站机群上有效运行。

(5) 异步执行时能保护用户的其他软件不受影响。

(6) 是可移植的标准平台。

3. PVM 简介

PVM(parallel virtual machine)[23]是美国国家基金会资助的公开软件系统，已经开发了许多版本、变种形式和辅助工具，包括用户界面、进程控制、容错和动态进程组等。所支持的包括 C，Fortran 和 JAVA。PVM 具有通用性极强的特点，既适合 TCP/IP 网络环境，又适合用于 MPP 型大型并行系统。PVM 具有以下特点：

(1) 通用性强，系统规模小(约几兆)。

(2) 既适合 TCP/IP 网络环境，又适合用于 MPP 型大型并行系统。

(3) 功能强，PVM 是一个自含式系统，包含了进程管理，负载平衡和 I/O 等功能，对用户的支持好。

(4) 异构性，PVM 支持异构性较好，使任务可充分利用工作组中合适的硬件平台，支持虚拟机使用不同的网络。

虽然 PVM 和 MPI 有些不同，但 MPI 和 PVM 正相互向对方演变。例如，MPI-2 中增加了进程管理功能，而现在的 PVM 已有了更多的集合通信功能。

3.5.3 并行矩量法在二维导体粗糙面电磁散射中的应用

1. 电场积分方程的建立以及二维粗糙面的三角面元建模

假设电磁波照射到如图 3.36(a)所示的二维导体高斯粗糙面上，入射电磁波的电场分量为 $\boldsymbol{E}^{\rm inc}(\boldsymbol{r})$，根据导体表面切向电场连续条件，可以得到电场积分方程[24]

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}^{\rm inc}(\boldsymbol{r})=\hat{\boldsymbol{n}}\times\left[{\rm i}k_0\eta_0\int_S\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\frac{1}{k_0^2}\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]{\rm d}s' \tag{3.141}$$

这里采用三角形贴片对粗糙面进行剖分，因为三角形贴片可以更精确地拟合粗糙表面[25]。如图 3.36(b)所示为利用三角面元对二维高斯粗糙面进行剖分后在 xy 平面的投影示意图。用 RWG 基函数[24]对二维高斯导体粗糙面电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$展开，并且采用 Galerkin 方法对积分方程(3.141)进行离散，可以得到矩阵方程

$$\bar{\bar{\boldsymbol{Z}}}\cdot\bar{\boldsymbol{I}}=\bar{\boldsymbol{V}} \tag{3.142}$$

其中，$\bar{\bar{\boldsymbol{Z}}}$为阻抗矩阵，$\bar{\boldsymbol{I}}$ 为未知的电流展开系数向量，$\bar{\boldsymbol{V}}$ 为电压向量。

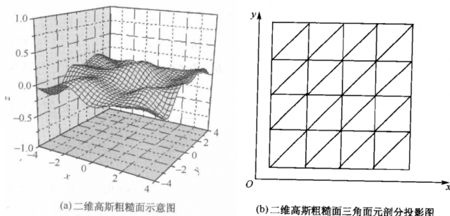


图 3.36　二维高斯粗糙面及其三角面元剖分示意图

2. 入射高斯波束的实现

在 3.1.2 节中处理一维粗糙面的电磁散射过程中引入了锥形波来避免人为反射,类似地,对于二维粗糙面电磁散射特性的研究也必须进行同样的处理。这里,引入二维高斯波束[26]来避免边缘处的人为反射。高斯波束中入射电场由下式表示[27]:

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(E_v\hat{\boldsymbol{v}}+E_h\hat{\boldsymbol{h}})\exp[\mathrm{i}(k_x x+k_y y-k_z z)]\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{3.143}$$

$\hat{\boldsymbol{h}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 分别代表水平极化单位矢量和垂直极化单位矢量,E_h 和 E_v 是极化分量对应的谱函数,设入射波在自由空间的波数为 k_0,$k_z=\sqrt{k_0^2-k_\rho^2}=\beta+\mathrm{i}\alpha$,$k_\rho=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$,其中,

$$\beta=\begin{cases}\sqrt{k_0^2-k_\rho^2}, & k_\rho\leqslant k_0\\ 0, & k_\rho>k_0\end{cases} \tag{3.144a}$$

$$\alpha=\begin{cases}0, & k_\rho\leqslant k_0\\ \sqrt{k_\rho^2-k_0^2}, & k_\rho>k_0,z\geqslant 0\\ -\sqrt{k_\rho^2-k_0^2}, & k_\rho>k_0,z<0\end{cases} \tag{3.144b}$$

定义局部坐标系$\{\hat{\boldsymbol{k}}_\beta,\hat{\boldsymbol{v}},\hat{\boldsymbol{h}}\}$,其中,

$$\hat{\boldsymbol{k}}_\beta=\frac{k_x\hat{\boldsymbol{x}}+k_y\hat{\boldsymbol{y}}-\beta\hat{\boldsymbol{z}}}{k_\beta}$$

$$\hat{\boldsymbol{h}}=\frac{\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{\beta}}}{|\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{\beta}}|}=\frac{1}{k_\rho}(-k_y\hat{\boldsymbol{x}}+k_x\hat{\boldsymbol{y}}) \tag{3.145}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}=-\frac{\beta}{k_\beta k_\rho}(k_x\hat{\boldsymbol{x}}+k_y\hat{\boldsymbol{y}})-\frac{k_\rho}{k_\beta}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{3.146}$$

$$\hat{\boldsymbol{k}}_\beta=\hat{\boldsymbol{v}}\times\hat{\boldsymbol{h}} \tag{3.147}$$

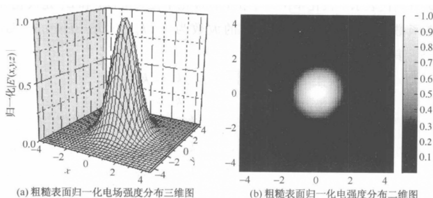
$$\boldsymbol{E}(k_x,k_y)=(E_v^{\text{inc}}\hat{\boldsymbol{v}}_{\text{i}}+E_h^{\text{inc}}\hat{\boldsymbol{h}}_{\text{i}})\Phi_B(k_x-k_{\text{i}x},k_y-k_{\text{i}y}) \tag{3.148}$$

其中，

$$\Phi_B(k_x-k_{\text{i}x},k_y-k_{\text{i}y})=\frac{B_xB_y}{4\pi}\exp\left\{-\frac{[(k_x-k_{\text{i}x})^2B_x^2+(k_y-k_{\text{i}y})^2B_y^2]}{4}\right\} \tag{3.149}$$

称为高斯型入射波束对应的谱函数。

上式中，$k_{\text{i}x}=k_0\sin\theta_{\text{i}}\cos\varphi_{\text{i}}$，$k_{\text{i}y}=k_0\sin\theta_{\text{i}}\sin\varphi_{\text{i}}$，$\theta_{\text{i}}$ 是入射角，φ_{i} 是入射方位角，$\hat{\boldsymbol{h}}_{\text{i}}=-\sin\varphi_{\text{i}}\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\varphi_{\text{i}}\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{v}}_{\text{i}}=-\cos\theta_{\text{i}}\cos\varphi_{\text{i}}\hat{\boldsymbol{x}}-\cos\theta_{\text{i}}\sin\varphi_{\text{i}}\hat{\boldsymbol{y}}-\sin\theta_{\text{i}}\hat{\boldsymbol{z}}$，$B_x$ 和 B_y 分别是 x 和 y 方向上控制入射波束的射束宽度的参数，这里取 $B_x=L_x/5$，$B_y=L_y/5$。将式(3.145)和式(3.146)代入式(3.143)，结合 $E_v^{\text{inc}}(k_x,k_y)=\hat{\boldsymbol{v}}_{\text{i}}\cdot\boldsymbol{E}^{\text{inc}}(k_x,k_y)$，$E_h^{\text{inc}}(k_x,k_y)=\hat{\boldsymbol{h}}_{\text{i}}\cdot\boldsymbol{E}(k_x,k_y)$，通过数值积分便可以获得导体粗糙表面的电场 $\boldsymbol{E}^{\text{inc}}(x,y,z)$。对于高斯波束的极化，这里需要指出，如果 $E_v^{\text{inc}}=0$，入射波就是水平极化，如果 $E_h^{\text{inc}}=0$，入射波就是垂直极化，但是入射波束并不是完全的单一极化波。例如，令 $E_v^{\text{inc}}=0$，$\varphi_{\text{i}}=0$，这样式(3.149)中的谱函数仅仅含有 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 分量，但由式(3.143)计算出来的入射场 $\boldsymbol{E}^{\text{inc}}(x,y,z)$ 仍有 x 和 z 方向分量，只不过远远小于 y 方向分量。图 3.37(a)给出了 $\theta_{\text{i}}=20°$，$\varphi_{\text{i}}=0°$，垂直极化波照射到图 3.36(a)中的二维高斯粗糙表面上的归一化电场强度 $|\boldsymbol{E}^{\text{inc}}(x,y,z)|$，图 3.37(b)是其二维投影图。



(a) 粗糙表面归一化电场强度分布三维图　(b) 粗糙表面归一化电强度分布二维图

图 3.37　粗糙表面归一化电场强度分布图

3. 共轭梯度法及其并行方案

20 世纪 50 年代，共轭梯度法由 Hestenes 和 Steifel 同时提出[28]。这是一种用有限步迭代求解矩阵方程的新颖算法，当时立即引起了学术界的轰动。这种算法的独特之处在于它不但对于任何初始值都收敛，而且在任意条件下都收敛于二次泛函的最小值。相比之下，雅可比迭代法以及高斯-塞德尔迭代法等的一般迭代法只能在一定条件下收敛。

不幸的是在 1950～1970 年该方法一直没得到广泛应用。其原因在于对于小矩阵用高斯消元法比用迭代法快。这是因为共轭梯度法的收敛步数 M 是 $N\times N$ 矩阵的独立特征值，往往对于小矩阵和很多物理问题有 $M=N$。但有趣的是，对于大型线性方程组，如电大尺寸复杂目标或电大尺度粗糙面散射等问题矩量法求解，要求解大型方程组。对于这类矩阵其特征值数往往 $M<N$，使用共轭梯度法求解速度大大快于高斯消元法。此时，其收敛的时间复杂度为 $O(N^2)$，而高斯消元法的则为 $O(N^3)$。由于矩量法获得的矩阵中自阻抗元素远大于非自阻抗元素，即矩阵的对角线和对角线邻近区域的元素的贡献是主要的，所以采用共轭梯度法可大大加快该矩阵方程的迭代求解速度。

图 3.38 给出了对于任意复系数矩阵方程 $\bar{\bar{A}}\cdot\bar{x}=\bar{b}$ 较为流行的共轭梯度法的求解流程图，其中，内积 $\langle\cdot\rangle$ 定义为对于给定两个向量 $\bar{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，$\bar{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}$，$\langle\bar{x},\bar{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i^*)$，而向量 $\bar{x}$ 的范数 $\|\bar{x}\|=\sqrt{\langle\bar{x},\bar{x}\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$，上标“*”与“+”分别代表取共轭和共轭转置，$\varepsilon$ 是很小的一个量，表示迭代允许的误差，在后面的数值计算中，ε 一律取 10^{-3}。从该流程图可以看出，共轭梯度法的计算量主要集中在矩阵与向量的乘积，以及矩阵的共轭转置矩阵与向量的乘积。

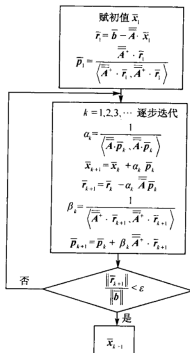


图 3.38　共轭梯度法求解线性方程组的流程图

对于电大尺度的粗糙面与电大尺寸目标的电磁散射问题，在利用矩量法求解时，会得到未知量非常多的大规模线性方程组，从 3.1 节可以看出，当这一矩阵是满矩阵时，储存矩阵元素和求解这个矩阵方程都将占大量的内存空间。为了求解这样的大规模线性方程组，既要有先

进的数值方法，又必须借助高性能的并行计算机。鉴于 PC 集群系统这一成本比较低的并行计算平台，将基于集群系统的并行计算用到计算电磁学领域已成为热点问题之一[29]。

对于矩量法离散得到的矩阵方程本文采用如前所述的共轭梯度法求解，这里进一步给出基于 PC 集群的 NOW 分布式并行计算系统的消息传递(MPI)模式的并行化的共轭梯度法。文献[29]详细给出了并行计算中虚拟拓扑的理论，以及对矩阵棋盘划分以后，并行共轭梯度法求解矩阵方程的步骤。从前边的内容可以看出共轭梯度法关键是计算矩阵与向量的乘积，以及矩阵的共轭转置矩阵与向量的乘积。为使 MPI 并行平台上的每个进程的负载平衡，每个进程分担储存的矩阵块大小应该一致，而如果将矩阵按照棋盘划分的话，矩阵只能按照 $N\times N(N=2,3,4,\cdots)$ 划分[29]，这样就必须有 N^2 个进程，难免对于硬件平台存在限制，而如果按行(或列)对矩阵进行进程划分的话，就可避免类似这样的问题。设有 5 个进程，矩量法矩阵大小 $m\times m$，当 m 不是 5 的整数倍时，可对矩阵进行行与列补 0，使得阻抗矩阵的行与列是 5 的整数倍，进而将阻抗矩阵每一个进程按行(或列)划分，这样就使得每一个进程负载平衡。基于 MPI 并行平台的特点，这里以 8×8 矩阵分 8 行为例，如图 3.39 所示，给出并行的 CGM 的实现过程。

$$\begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} & a_{06} & a_{07} & a_{08} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(0-7)1} \\ x_{(0-7)2} \\ x_{(0-7)3} \\ x_{(0-7)4} \\ x_{(0-7)5} \\ x_{(0-7)6} \\ x_{(0-7)7} \\ x_{(0-7)8} \end{bmatrix}$$

(a)阻抗矩阵与向量的乘积

$$\begin{bmatrix} a_{01}^* & a_{11}^* & a_{21}^* & a_{31}^* & a_{41}^* & a_{51}^* & a_{61}^* & a_{71}^* \\ a_{02}^* & a_{12}^* & a_{22}^* & a_{32}^* & a_{42}^* & a_{52}^* & a_{62}^* & a_{72}^* \\ a_{03}^* & a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^* & a_{43}^* & a_{53}^* & a_{63}^* & a_{73}^* \\ a_{04}^* & a_{14}^* & a_{24}^* & a_{34}^* & a_{44}^* & a_{54}^* & a_{64}^* & a_{74}^* \\ a_{05}^* & a_{15}^* & a_{25}^* & a_{35}^* & a_{45}^* & a_{55}^* & a_{65}^* & a_{75}^* \\ a_{06}^* & a_{16}^* & a_{26}^* & a_{36}^* & a_{46}^* & a_{56}^* & a_{66}^* & a_{76}^* \\ a_{07}^* & a_{17}^* & a_{27}^* & a_{37}^* & a_{47}^* & a_{57}^* & a_{67}^* & a_{77}^* \\ a_{08}^* & a_{18}^* & a_{28}^* & a_{38}^* & a_{48}^* & a_{58}^* & a_{68}^* & a_{78}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{12} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_{45} \\ x_{56} \\ x_{67} \\ x_{78} \end{bmatrix}$$

(b)阻抗矩阵的共轭转置矩阵与向量的乘积

图 3.39 并行 CGM 中的矩阵与向量的乘积

图 3.39 中矩阵元素和向量元素的第一个下标表示元素所在的进程号。如图 3.39(a)所示，计算阻抗矩阵与向量的乘积时，向量 $\bar{x}$ 必须存放到每一个进程，按照如下步骤：

0 进程。计算 $\sum_{i=1}^{8} a_{0i}\times x_{0i}=b_0$，从 j 进程接收向量 $\boldsymbol{b}_j$，得到最终的矩阵向量乘积 $\bar{\bar{\boldsymbol{A}}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}}=\bar{\boldsymbol{y}}=[b_0\quad b_1\quad b_2\quad b_3\quad b_4\quad b_5\quad b_6\quad b_7]^{\mathrm{T}}$。

j 进程。计算 $\sum_{i=1}^{8} a_{ji}\times x_{ji}=b_j(j=1,\cdots,7)$，将计算结果 b_j 发送到 0 进程中。

如图3.39(b)所示，计算阻抗矩阵的共轭转置矩阵与向量的乘积时，按照如下步骤：

0进程。计算 $b_{0i}=a_{0i}^{*}x_{01}(i=1,\cdots,8)$，可得 $\bar{c}_0=[b_{01}\quad b_{02}\quad b_{03}\quad b_{04}\quad b_{05}\quad b_{06}\quad b_{07}\quad b_{08}]^{\mathrm{T}}$，从 j 进程接收向量 $\bar{c}_j$，设 $\overline{\overline{A}}^{+}\cdot\bar{x}=\bar{y}'=[y_1\quad y_2\quad y_3\quad y_4\quad y_5\quad y_6\quad y_7\quad y_8]^{\mathrm{T}}$，则 $y_m=\sum_{k=0}^{7}b_{km}(m=1,\cdots,8)$。

j 进程。计算 $b_{ji}=a_{ji}^{*}x_{j(j+1)}(i=1,\cdots,8)$，可得 $\bar{c}_j=[b_{j1}\quad b_{j2}\quad b_{j3}\quad b_{j4}\quad b_{j5}\quad b_{j6}\quad b_{j7}\quad b_{j8}]^{\mathrm{T}}(j=1,\cdots,7)$，将 $\bar{c}_j$ 发送给0进程。

以上是基于MPI平台特点，共轭梯度法中矩阵与向量的乘积以及矩阵的共轭转置矩阵与向量的乘积并行实现步骤[30]。

4. 远区散射场及双站散射系数的求解

在利用并行化的共轭梯度法解得电流展开系数后，就可以获得波束照射下，二维导体高斯粗糙面电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$，远区散射电场通常由下式计算：

$$\boldsymbol{E}_{r\to\infty}^{\mathrm{s}}=[S_v(\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}})\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}}+S_h(\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}})\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}}]\frac{\exp(\mathrm{i}k_0r)}{4\pi r}\tag{3.150}$$

其中，

$$S_h(\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}})=\mathrm{i}k_0\eta_0\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}}\cdot\int_S\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}k_0\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}s'\tag{3.151a}$$

$$S_v(\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}})=\mathrm{i}k_0\eta_0\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}}\cdot\int_S\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}k_0\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}s'\tag{3.151b}$$

$\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}=\sin\theta_{\mathrm{s}}\cos\varphi_{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\theta_{\mathrm{s}}\sin\varphi_{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{y}}+\cos\theta_{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{z}}$，可见 $\{\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}},\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}},\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}}\}$ 也构成局部坐标系

$$\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}}=\frac{\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}}{|\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}|}=-\sin\varphi_{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\varphi_{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{y}}\tag{3.152}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}}=\hat{h}_{\mathrm{s}}\times\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}=\cos\theta_{\mathrm{s}}\cos\varphi_{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\theta_{\mathrm{s}}\sin\varphi_{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{y}}-\sin\theta_{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{z}}\tag{3.153}$$

这样水平极化和垂直极化方向的远区散射电场分别为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{s}}=\lim_{r\to\infty}(S_h(\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}})\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}})\frac{\exp(\mathrm{i}k_0r)}{4\pi r}\tag{3.154a}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{s}}=\lim_{r\to\infty}(S_v(\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}})\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}})\frac{\exp(\mathrm{i}k_0r)}{4\pi r}\tag{3.154b}$$

进而获得远区散射电场和双站散射系数(bistatic scattering coefficient,BSC)为

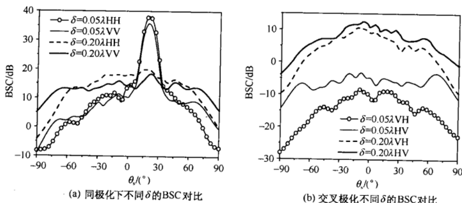
$$\mathrm{BSC}_{\alpha\beta}=\lim_{r\to\infty}\frac{4\pi r^2}{P^{\mathrm{inc}}}|\boldsymbol{E}_{\beta\alpha}^{\mathrm{s}}|^2,\quad\alpha,\beta=\mathrm{H},\mathrm{V}\tag{3.155}$$

其中，P^{inc} 表示入射波束投射到粗糙面的总功率，是一系列加权平面波的功率求和，α 和 β 分别代表入射场和散射场的极化方式。

5. 数值结果分析

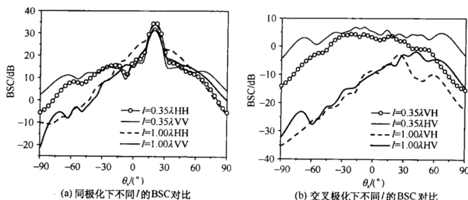
假设模拟的二维高斯粗糙面在单边方向采样为 N 段(即采样点数为 $N+1$),可以得出此时对粗糙面用三角面元剖分后的公共棱数目为 $3N^2-2N$,本节下面所有算例中,粗糙面的尺寸均为 $9.15\lambda \times 9.15\lambda$,粗糙面的单边方向共分为 64 段,最终可得矩量法矩阵方程的未知量个数为 $3\times 64\times 64-2\times 64=12160$,这在单个 PC 机上是无法储存与计算的,必须借助于并行计算平台的并行矩量法计算该问题,入射角 $\theta_i=20°$,入射方位角 $\varphi_i=0°$,粗糙面统计样本数为 15。

图 3.40(a)和图 3.40(b)分别给出了不同极化方式、不同均方根高度下 $\varphi_s=0°$ 平面内双站散射系数的对比,其中,相关长度 $l=0.5\lambda$。图 3.41(a)和图 3.41(b)分别给出了不同极化方式、不同相关长度下 $\varphi_s=0°$平面内的双站散射系数的对比,其中,均方根高度 $\delta=0.1\lambda$。从图 3.40 和图 3.41 可以看出,不论粗糙度参数为多少,同极化 (HH,VV)的双站散射系数始终要大于交叉极化(HV,VH)的双站散射系数。从图 3.40 中还可以看出,在镜向方向附近,HH 极化的双站散射系数大于 VV 极化,而在远离镜向方向要小于 VV 极化。当 δ 增大时,HH 和 VV 极化的双站散射系数镜向方向分量减小,非镜向方向分量增加。对于交叉极化,不论 δ 取值多少,HV 极化的双站散射系数要大于 VH,并且随着 δ 的增大两种交叉极化的双站散射系数都增大。从图 3.41(a)和图 3.41(b)中还可以看出,对于同极化而言,在 δ 相同的情况下,双站散射系数在镜向方向差别不大,但随着 l 的减小,远离镜向方向上的双站散射系数增加,这主要是由于随着 l 的减小,粗糙面变化越来越剧烈,导致非相干散射分量增加。同样对于交叉极化而言,随着 l 的减小交叉极化下的双站散射系数迅速增加。



(a) 同极化下不同 δ 的BSC对比　(b) 交叉极化不同 δ 的BSC对比

图 3.40　不同 δ 的 BSC 对比



(a) 同极化下不同 l 的BSC对比　(b) 交叉极化下不同 l 的BSC对比

图 3.41　不同 l 的 BSC 对比

3.5.4 并行 FDTD 在二维粗糙面电磁散射中的应用

与矩量法一样，传统的 FDTD 方法在解决电大尺寸的电磁散射问题中受到了很大限制，随着计算机技术的发展，采用并行 FDTD 方法已成为解决此类问题的有效途径之一[31]。但与前面介绍的矩量法不同，FDTD 方法具有天然的并行性，电磁场的递推仅需要其周围的信息，每一个处理器仅需要与之相邻的处理器交换信息，即只交换子区域边界上的信息，因此，FDTD 方法具有很高的并行计算效率。下面给出基于 PC 集群 MPI 平台计算二维粗糙面电磁散射的并行 FDTD 算法。

1. 二维粗糙面电磁散射的 FDTD 基本理论

二维粗糙面的建模方法在第 1 章中有详细的介绍，这里不再重复。而二维粗糙面电磁散射的 FDTD 理论也与 3.3 节中介绍的一维粗糙面电磁散射的 FDTD 理论基本类似，只不过因为要处理的电磁场分量较多而更为复杂，图 3.42 为二维粗糙面电磁散射的 FDTD 计算模型示意图。利用中心差分公式对 Maxwell 旋度方程进行离散，则三维情况下 FDTD 计算区域场分量迭代式可表示为(以 E_x 分量为例)

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) = {} & CA(m)E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) \\ & + CB(m)\left[\frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2,j+1/2,k)-H_z^{n+1/2}(i+1/2,j-1/2,k)}{\Delta y}\right. \\ & \left. -\frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2,j,k+1/2)-H_y^{n+1/2}(i+1/2,j,k-1/2)}{\Delta z}\right] \end{aligned} \tag{3.156}$$

式(3.156)中系数 CA,CB 的定义与 3.3 节相同,电磁场其他各分量迭代表达式详见文献[9]。

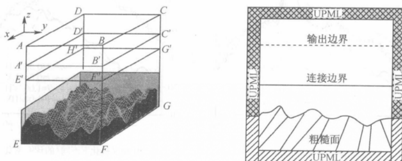


图 3.42　二维粗糙面电磁散射的 FDTD 计算模型

对于三维情况下的 UPML 吸收边界,其时间推进步骤仍为 $\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{P}'\to\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{H}$,则三维情况下 UPML 吸收边界在式(3.101)～式(3.107)的基础上被更新为(电磁场均以 x 方向分量为例)

$$
\begin{aligned}
P'^{n+1}_x\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)=&\frac{\varepsilon_1(m)/\Delta t-\sigma_1(m)/2}{\varepsilon_1(m)/\Delta t+\sigma_1(m)/2}P'^{n}_x\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)+\frac{1}{\varepsilon(m)/\Delta t+\sigma(m)/2}\\
&\times\left[\frac{H^{n+1/2}_z(i+1/2,j+1/2,k)-H^{n+1/2}_z(i+1/2,j-1/2,k)}{\Delta y}\right.\\
&\left.-\frac{H^{n+1/2}_y(i+1/2,j,k+1/2)-H^{n+1/2}_y(i+1/2,j,k-1/2)}{\Delta z}\right]
\end{aligned}
\tag{3.157}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{n+1}_x\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)=&\frac{\kappa_y(m)/\Delta t-\sigma_y(m)/2\varepsilon_0}{\kappa_y(m)/\Delta t+\sigma_y(m)/2\varepsilon_0}P^{n}_x\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)+\frac{1/\Delta t}{\kappa_y(m)/\Delta t+\sigma_y(m)/2\varepsilon_0}\\
&\times\left[P'^{n+1}_x\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)-P'^{n}_x\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\right]
\end{aligned}
\tag{3.158}
$$

$$
\begin{aligned}
E^{n+1}_x\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)=&\frac{\kappa_z(m)/\Delta t-\sigma_z(m)/2\varepsilon_0}{\kappa_z(m)/\Delta t+\sigma_z(m)/2\varepsilon_0}E^{n}_x\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\\
&+\frac{\kappa_x(m)/\Delta t+\sigma_x(m)/2\varepsilon_0}{\kappa_z(m)/\Delta t+\sigma_z(m)/2\varepsilon_0}P^{n+1}_x\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\\
&-\frac{\kappa_x(m)/\Delta t-\sigma_x(m)/2\varepsilon_0}{\kappa_z(m)/\Delta t+\sigma_z(m)/2\varepsilon_0}P^{n}_x\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)
\end{aligned}
\tag{3.159}
$$

$$
\begin{aligned}
B^{n+1/2}_x\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)=&\frac{\kappa_y(m)/\Delta t-\sigma_y(m)/2\varepsilon_0}{\kappa_y(m)/\Delta t+\sigma_y(m)/2\varepsilon_0}B^{n-1/2}_x\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\\
&-\frac{1}{\kappa_y(m)/\Delta t+\sigma_y(m)/2\varepsilon_0}\\
&\times\left[\frac{E^{n}_z(i,j+1,k+1/2)-E^{n}_z(i,j,k+1/2)}{\Delta y}\right.
\end{aligned}
$$

$$-\frac{E_y^n(i,j+1/2,k+1)-E_y^n(i,j+1/2,k)}{\Delta z}\Bigg]$$

(3.160)

$$\begin{aligned}H_x^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)=&\frac{\kappa_z(m)/\Delta t-\sigma_z(m)/2\varepsilon_0}{\kappa_z(m)/\Delta t+\sigma_z(m)/2\varepsilon_0}H_x^{n-1/2}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\\&+\frac{\kappa_x(m)/\Delta t+\sigma_x(m)/2\varepsilon_0}{\mu_1\kappa_z(m)/\Delta t+\mu_1\sigma_z(m)/2\varepsilon_0}B_x^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\\&-\frac{\kappa_x(m)/\Delta t-\sigma_x(m)/2\varepsilon_0}{\mu_1\kappa_z(m)/\Delta t+\mu_1\sigma_z(m)/2\varepsilon_0}B_x^{n-1/2}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

(3.161)

以上各式系数中的 m 与相应等式左边场分量对应的网格编号一致，$\kappa_x(m)$，$\kappa_y(m)$和 $\kappa_z(m)$的具体表达式参见文献[13]，其他电磁场分量公式可通过 x,y,z(即 i,j,k)的循环替代得到。

图 3.43 为二维粗糙面电磁散射入射波与散射波示意图，θ_i，ϕ_i，α 分别表示入射角、入射方位角和极化角，θ_s，ϕ_s 表示散射角和散射方位角。三维情况下，入射波同样用一维 FDTD 随时间逐步推进的方式加入，此时投影到 xyz 坐标系中的入射场分量可以表示为

$$\begin{cases}E_{x,i}^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)=E_{in}^n(p)(-\sin\phi_i\sin\alpha+\cos(\pi-\theta_i)\cos\phi_i\cos\alpha)\\E_{y,i}^n\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)=E_{in}^n(p)(\cos\phi_i\sin\alpha+\cos(\pi-\theta_i)\sin\phi_i\cos\alpha)\end{cases}$$

(3.162a)

$$\begin{cases}H_{x,i}^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)=H_{in}^{n+1/2}(p)(-\sin\phi_i\cos\alpha-\cos(\pi-\theta_i)\cos\phi_i\sin\alpha)\\H_{y,i}^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)=H_{in}^{n+1/2}(p)(\cos\phi_i\cos\alpha-\cos(\pi-\theta_i)\sin\phi_i\sin\alpha)\end{cases}$$

(3.162b)

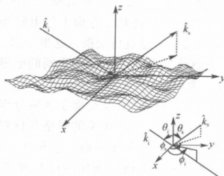


图 3.43　二维粗糙面电磁散射入射波与散射波示意图

连接边界入射波加入方式均可参照3.3节介绍的一维粗糙面电磁散射中FDTD方法中连接边界的设置，这里不再赘述。通过时间步迭代，可以得到三维情况下FDTD计算区域内电磁场的近场分量，要获得远区散射场还必须利用等效原理，将输出边界上的场值进行外推，从而得到三维远区场的表达式[9]

$$E_\theta = \mathrm{i}k_0 \frac{\exp(\mathrm{i}k_0 r)}{4\pi r}[\eta_0(f_x\cos\theta_s\cos\phi_s + f_y\cos\theta_s\sin\phi_s) + (-f_{mx}\sin\phi_s + f_{my}\cos\phi_s)] \tag{3.163a}$$

$$E_\varphi = -\mathrm{i}k_0 \frac{\exp(\mathrm{i}k_0 r)}{4\pi r}[\eta_0(f_x\sin\phi_s - f_y\cos\phi_s) + (f_{mx}\cos\theta_s\cos\phi_s + f_{my}\cos\theta_s\sin\phi_s)] \tag{3.163b}$$

最后定义二维粗糙面双站电磁散射系数如下：

$$\sigma_{\mathrm{HH}} = \lim_{r\to\infty}\frac{4\pi r^2}{S}\frac{|E_\theta|^2}{|E_i|^2}, \quad \sigma_{\mathrm{HV}} = \lim_{r\to\infty}\frac{4\pi r^2}{S}\frac{|E_\varphi|^2}{|E_i|^2}, \quad \alpha = 0° \tag{3.164a}$$

$$\sigma_{\mathrm{VH}} = \lim_{r\to\infty}\frac{4\pi r^2}{S}\frac{|E_\theta|^2}{|E_i|^2}, \quad \sigma_{\mathrm{VV}} = \lim_{r\to\infty}\frac{4\pi r^2}{S}\frac{|E_\varphi|^2}{|E_i|^2}, \quad \alpha = 90° \tag{3.164b}$$

其中，H表示水平极化，V代表垂直极化，S为二维粗糙面的有效照射面积。

2. 并行FDTD技术介绍

并行FDTD算法中有两个重要问题[31]：一是计算区域的分解，二是不同子区域间的数据交换。首先介绍并行FDTD方法中的区域分解问题，一般有三种分解方式(图3.44)。处理器放置的结构将直接影响到并行计算的效率，最佳的设置应当是具有相同计算能力的处理器获得相同的工作量。假设参与并行计算的每个节点都具有相同的计算能力，在进行区域分解时应尽量让每个子区域大小相同，这样可以使各计算节点粗略达到负载平衡，以保证并行计算效率。在具体编程过程中，可以建立相应的拓扑结构来对各子区域进行标识。

各子区域之间的数据交换技术是并行FDTD算法要解决的另一个重要问题。每个子区域进行内部电磁场的递推时是不需要借助其他区域场信息的，等到各子区域进行一次时间步迭代后，就需要将其分界面上的电磁场信息与之相邻的子区域同一时刻的分界面上的电磁场信息进行交换。这里介绍一种较为常用的数据传递方法，该方法用一个重叠区来实现两个子区域之间的电磁场信息交换。不失一般性，以沿x方向区域分解为例，如图3.45所示。

这种方法重叠区包含一个网格，只需要交换子区域分界面上切向磁场分量的信息，子区域界面上的切向电场以及与之相关的网格及材料信息都包括在当前的子区域内。在子区域两端的附加网格用来接收与它相邻子区域的磁场，这个磁场在该区域用作边界条件，这个附加网格内所用的电场和磁场在编程过程中不予计算。

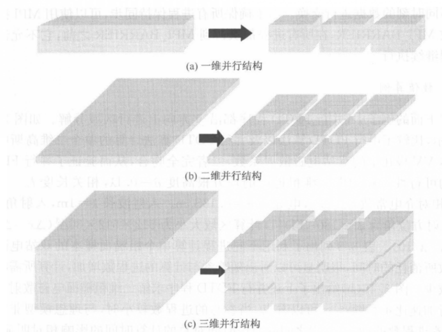


图 3.44　并行 FDTD 区域分解

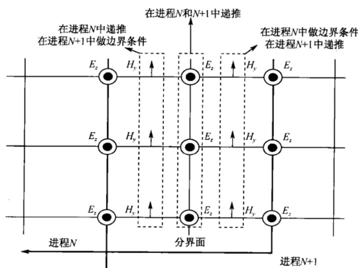


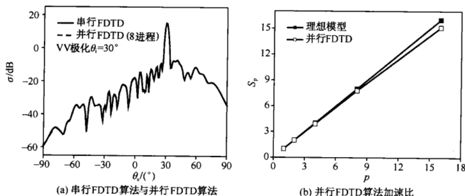
图 3.45　子区域分界面数据交换过程

另外，在并行 FDTD 算法中，各计算节点的通信延迟、处理器计算速度等因素都可能造成各节点的计算不同步，这样会影响并行计算的效率，甚至导致各计算节

点间不同时刻的数据进行交换。为了确保所有进程保持同步，可以使用 MPI 提供的函数 MPI_BARRIER，在所有进程都执行到 MPI_BARRIER 之前，它不允许任何进程继续执行。

3. *数值算例*

在下面的例子中，并行 FDTD 程序都沿 y 方向上进行区域分解。如图 3.46(a)所示，比较了串行 FDTD 算法以及并行 FDTD 算法计算的单个二维高斯粗糙面样本 VV 极化下的双站电磁散射系数，二者完全吻合，从而验证了并行 FDTD 算法的可行性。算例中二维粗糙面的均方根高度 $\delta=0.1\lambda$，相关长度 $l_x=l_y=1.0\lambda$，相对介电常数 $\varepsilon_r=2.5$，电导率 $\sigma=0.18\text{S/m}$。入射波长 $\lambda=1\text{m}$，入射角 $\theta_i=30°$，入射方位角为 $\phi_i=180°$，FDTD 计算区域大小为 $512\times512\times30\Delta^3$ ($\Delta x=\Delta y=\Delta z=\Delta=\lambda/10$)。表 3.3 列出了利用不同进程计算单个粗糙面样本的双站电磁散射系数所消耗的时间，很明显可以看出随着参与计算的进程数增加，计算所需时间明显减少。图 3.46(b)给出了上述并行 FDTD 程序求解二维粗糙面电磁散射系数的并行加速比示意图[31]。可以看出，当参与的进程数较小时，与理想模型非常接近，随着进程数的增大，进程之间的通信时间对总的计算时间的影响相对明显，导致 FDTD 的并行加速比略微偏离理想模型。



(a) 串行FDTD算法与并行FDTD算法　(b) 并行FDTD算法加速比

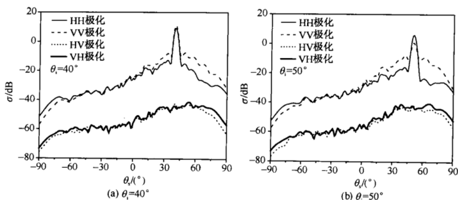
图 3.46

表 3.3　不同进程数下单个粗糙面样本散射的计算时间比较

进程数	1	2	4	8	16
消耗时间/s	22447.80	11280.30	5726.48	2285.32	1486.61

图 3.47(a)和(b)利用并行 FDTD 算法计算了不同极化状态下二维粗糙面的双站电磁散射系数，入射角分别为 40°和 50°，其他粗糙面参数与图 3.46(a)相同，

计算结果对 15 个粗糙面样本进行了统计。显然，同极化散射结果要大于交叉极化散射结果。



(a) θ_i=40°　　(b) θ_i=50°

图 3.47　不同极化下二维粗糙面的双站电磁散射系数

参 考 文 献

[1] Warnick K F, Chew W C. Numerical simulation methods for rough surface scattering. Wave in Random Media, 2001, 11(1): 1～30.

[2] Harrington R F. Field Computation by Moment Method. New York: Macmillan Company, 1968.

[3] Tsang L, Kong J A, Ding K H et al. Scattering of Electromagnetic Waves: Numerical Simulations. New York: Wiley Interscience, 2001.

[4] Thorsos E I. The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum. J Acoust Soc Am, 1988, 83(1): 78～92.

[5] Thorsos E I. Acoustic scattering from 'Pierson-Moskowitz' sea surface. J Acoust Soc Am, 1990, 88(1): 335～349.

[6] Ye H X, Jin Y Q. Parameterization of the tapered incident wave for numerical simulation of electromagnetic scattering from rough surface. IEEE Trans Antennas Propagat, 2005, 53(3): 1234～1237.

[7] Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. Journal of Computational Physics, 1985, 60(2): 187～207.

[8] Chew W C, Jin J M, Michielssen E et al. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetic. Boston/London: Artech House, Inc., 2001.

[9] 葛德彪，闫玉波. 电磁波时域有限差分方法. 西安：西安电子科技大学出版社，2005.

[10] Taflove A, Hagness S C. Computational Electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain Method. Boston: Artech House, Inc., 2005.

[11] Fung A K, Shah M R, Tjuatja S. Numerical simulation of scattering from three-dimensional randomly rough surfaces. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 1995, 32(5): 986～995.

[12] Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. IEEE Trans Electromagn Compat, 1981, EMC-23(4): 377～382.

[13] Gedney S D. An anisotropic PML absorbing media for the FDTD simulation for fields in lossy and dispersive media. Electromagnetics, 1996, 16(4): 425～449.

[14] Li J, Guo L X, Zeng H et al. Message-passing-interface-based parallel FDTD investigation on the EM scattering from a 1-D rough sea surface using uniaxial perfectly matched layer absorbing boundary. J Opt Soc Am A, 2009, 26(6): 1494～1502.

[15] Rynne B P. Time domain scattering from arbitrary surfaces using the electric field integral equation. J Electromagnetic Waves Appl, 1991, 5: 93～112.

[16] Wilton D R, Rao S M, Glisson A W. Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains. IEEE Trans Antennas Propagat, 1984, 32(3): 276～281.

[17] Chew W C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. New York: IEEE Press, 1995.

[18] Rao S M. Time Domain Electromagnetic. San Diego: Academic Press, 1999.

[19] 王蕊. 粗糙面及其与目标复合电磁散射中的相关问题研究 . 西安: 西安电子科技大学博士学位论文, 2009.

[20] 陈国良. 并行计算—结构. 算法. 编程. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[21] 杨丽霞. 复杂介质电磁散射的 FDTD 算法及其相关技术研究. 西安: 西安电子科技大学博士学位论文, 2006.

[22] 都志辉. 高性能计算并行编程技术. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[23] Geist A, Beguelin A, Dongarra J. PVM: Parallel Virtual Machine: A Users' Guide and Tutorial for Network Parallel Computing. London: MIT Press, 1994.

[24] Rao S M, Wilton D R, Glisson A W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. IEEE Trans Antennas Propagat, 1982, 30(3): 409～418.

[25] Robert L, Chew W C. Monte Carlo of electromagnetic scattering from two-dimensional random rough surfaces. IEEE Trans Antennas Propagate, 1997, 45(2): 235～245.

[26] Braunisch H, Zhang Y, Ao C O. Tapered wave with dominant polarization state for all angles of incidence. IEEE Trans Antennas Propagate, 2000, 48(7): 1086～1095.

[27] Xia M Y, Chan C H, Li S Q. Wavelet-based simulation of electromagnetic scattering from large-scale two-dimensional perfectly conducting random rough surfaces. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 2001, 39(4): 718～725.

[28] Hestenes M, Steifel E. Method of conjugate gradients for solving linear systems. Res Nat Bur Stand, 1952, 49: 409～436.

[29] 张玉. 电磁场并行计算. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2006.

[30] Guo L X, Wang A Q, Ma J. Study on EM wave scattering from 2-D target above 1-D large scale rough surface with low grazing incidence by parallel MOM based on PC clusters. Progress in Electromagnetic Research, 2009, 89: 149～166.

[31] 余文华, 苏涛, Mittra R 等. 并行时域有限差分. 北京: 中国传媒大学出版社, 2005.

第 4 章　分层粗糙面的电磁散射

第 2 章和第 3 章分别利用近似方法和数值算法研究了一维、二维单层粗糙面的电磁散射特性，但是当电磁波照射到沙漠、雪地、土壤以及有泡沫、油污或浮冰的海面上时，对分层粗糙面的电磁散射特性的研究显得尤为重要。本章在前面两章的基础上，分别利用 Kirchhoff 近似、Kirchhoff 近似和矩量法相结合的混合方法，以及时域有限差分法研究了一维、二维分层粗糙面的电磁散射特性。

4.1　锥形波入射下 Kirchhoff 近似求解一维分层粗糙面电磁散射

2.2 节介绍的 Ulaby 的驻留相位法与标量近似法 Kirchhoff 近似理论是先对粗糙面样本进行统计，然后通过积分来计算散射场进而得到散射系数，对于高斯和指数谱粗糙面，能够进一步给出其散射系数的解析表达式。文献[1]中，Ogilvy 也给出了一种 Kirchhoff 近似理论，先通过积分计算单个粗糙面样本的散射场，然后对多个样本进行统计来计算散射系数，可以用于解决任何满足 Kirchhoff 近似的随机粗糙面的电磁散射问题，如常见的高斯、指数粗糙面和 PM 海面等。事实上，Ulaby 与 Ogilvy 的 Kirchhoff 近似理论均基于格林第二定理，遵循相同的亥姆霍兹积分方程，其散射系数的定义本质上均为散射能量和入射能量的比值，因而这两种理论本质上是一致的，本章将采用文献[1]中的 Kirchhoff 近似理论。由于该方法计算时需要模拟有限长尺寸的粗糙面，为了得到较准确的计算结果，消除粗糙面的人为截断所引起的边缘效应，将第 3 章矩量法中使用的锥形入射波引入到文献[1]中传统的 Kirchhoff 近似方法中。

4.1.1　锥形波入射下 Kirchhoff 近似求解单层粗糙面的电磁散射

本节首先利用锥形波入射下的 Kirchhoff 近似求解考虑遮蔽效应时单层粗糙面的电磁散射，数值结果分别以高斯粗糙面及 PM 海面为例，并与经典矩量法的计算结果进行了比较和验证。

如图 4.1 所示，$z=f(x)$表示一维粗糙面的高度起伏，上半空间为自由空间$\Omega_0(\varepsilon_0,\mu_0)$，下半空间为$\Omega_1(\varepsilon_1,\mu_0)$，其中，$\varepsilon_0$，$\varepsilon_1$ 分别为 Ω_0，Ω_1 中的相对介电常数，θ_i 和 θ_s 分别为入射角和散射角。

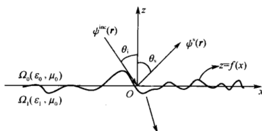


图 4.1　一维粗糙面散射示意图

1. 锥形波入射下的 Kirchhoff 近似

考虑有一入射波 $\psi^{inc}(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}=x\hat{\boldsymbol{x}}+z\hat{\boldsymbol{z}})$ 入射到如图 4.1 所示的一维随机粗糙面 $z=f(x)$ 上，由第二格林定理可得空间任意点的散射场 $\psi^s(\boldsymbol{r})$ 为[1]

$$\psi^s(\boldsymbol{r})=\psi(\boldsymbol{r})-\psi^{inc}(\boldsymbol{r})=\int_c\left[\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}c' \quad (4.1)$$

其中，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别表示场点和源点，$\mathrm{d}c'=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x'$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的一阶导数。$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为自由空间中的二维格林函数，表达式参见式(3.15)，其对单位法向矢量的导数为

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}=\frac{\mathrm{i}k}{4}\hat{\boldsymbol{n}}'\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}H_1^{(1)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \quad (4.2)$$

其中，k 为自由空间波数，$\hat{\boldsymbol{n}}'$ 为粗糙表面的单位法向矢量为

$$\hat{\boldsymbol{n}}'=\frac{-f'(x)\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \quad (4.3)$$

假设粗糙表面上每一点的曲率半径都远远大于入射波长，这样就满足了 Kirchhoff 切平面近似的要求，利用菲涅耳定律可得粗糙面上方空间任意一点的散射场及其对单位法向矢量的导数为

$$\psi^s(\boldsymbol{r}')=R(\boldsymbol{r}')\psi^{inc}(\boldsymbol{r}') \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial\psi^s(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}=-R(\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi^{inc}(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} \quad (4.4b)$$

$\psi(\boldsymbol{r}')$ 表示粗糙面上任意点的总场，即

$$\psi(\boldsymbol{r}')=\psi^{inc}(\boldsymbol{r}')+\psi^s(\boldsymbol{r}') \quad (4.5)$$

结合式(4.4a)和式(4.4b)可得总场及其对单位法向矢量的导数为

$$\psi(\boldsymbol{r}')=[1+R(\boldsymbol{r}')]\psi^{inc}(\boldsymbol{r}') \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}=[1-R(\boldsymbol{r}')]\frac{\partial\psi^{inc}(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} \quad (4.6b)$$

其中，$R(\boldsymbol{r}')$ 为菲涅耳反射系数，具体表达式为

$$R(\boldsymbol{r}') = \begin{cases} \dfrac{\cos\theta_k - (\varepsilon_1 - \sin^2\theta_k)^{1/2}}{\cos\theta_k + (\varepsilon_1 - \sin^2\theta_k)^{1/2}}, & \text{HH} \\ \dfrac{\varepsilon_1\cos\theta_k - (\varepsilon_1 - \sin^2\theta_k)^{1/2}}{\varepsilon_1\cos\theta_k + (\varepsilon_1 - \sin^2\theta_k)^{1/2}}, & \text{VV} \end{cases} \tag{4.7}$$

θ_k 表示局部入射角，对于下层介质为良导体的特殊情况，HH 极化下 $R=-1$，VV 极化下 $R=1$。将式(3.15)、式(4.2)和式(4.6)代入式(4.1)即可求解平面波入射下的 Kirchhoff 近似结果。但由于模拟粗糙面长度是有限的，会在截断处产生人为反射，这里将第 3 章中提到的 Thorsos 锥形波[2,3]（见式(3.40)）引入到传统的 Kirchhoff 近似中。

对于随机粗糙面的散射计算而言，式(3.40)中的宽度因子 g 及粗糙面长度 L 的选取需要满足波动方程、相关长度及能量截断的要求，即[4,5]

$$g > \frac{6}{\cos\theta_i^{1.5}} \tag{4.8}$$

$$L > 15l \quad 且 \quad L \geqslant 4g \tag{4.9}$$

其中，l 为粗糙面的相关长度。这一标准适用的入射角范围为 $\theta_i \in (0°, 90°)$。

通过推导可以求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} &= (\nabla\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}') \cdot \hat{\boldsymbol{n}}') \\ &= \psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}')\left[-f(x)P_1 + (1+\tan\theta_i)\frac{2(x' + f(x')\tan\theta_i)}{g^2}P_2 + P_3\right] \end{aligned} \tag{4.10}$$

其中，

$$P_1 = \mathrm{i}k\sin\theta_i(1 + w(\boldsymbol{r}')) \tag{4.11}$$

$$P_2 = \mathrm{i}k\frac{2(x'\sin\theta_i - f(x')\cos\theta_i)}{(kg\cos\theta_i)^2} - 1 \tag{4.12}$$

$$P_3 = -\mathrm{i}k\cos\theta_i(1 + w(\boldsymbol{r}')) \tag{4.13}$$

将式(3.40)、式(3.42)和式(4.10)代入式(4.6)可得到总场 $\psi(\boldsymbol{r}')$ 和 $\dfrac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}$。下面需要得到 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}$ 的表达式。由远场近似可得

$$k|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = k(r^2 - 2\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r} + r'^2)^{1/2} \sim kr\left[1 - \frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}}{r^2} + O\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right] \sim kr - k\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}' \tag{4.14}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 为场点的方向。利用式(4.14)的远场近似及二维格林函数的大宗量近似表达式[6]，二维格林函数可以表示为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \approx \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{8\pi kr}}\exp(\mathrm{i}kr)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r}') \tag{4.15}$$

用类似的步骤可以推导出二维格林函数对粗糙表面单位法矢偏导的远场近似为

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} \approx \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{8\pi kr}}\exp(\mathrm{i}kr)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}')(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}') \tag{4.16}$$

其中，散射波矢 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}=k(\sin\theta_{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\theta_{\mathrm{s}}\hat{\boldsymbol{z}})$。

结合式(4.1)、式(3.40)、式(4.10)、式(4.6)、式(4.15)和式(4.16)，可以得到锥形波入射时 Kirchhoff 近似下的散射场表达式

$$\psi^{s}(\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{8\pi kr}}\exp(\mathrm{i}kr)\psi_{\mathrm{s}}^{(N)}(\theta_{\mathrm{s}}) \tag{4.17}$$

其中，

$$\psi_{\mathrm{s}}^{(N)}(\theta_{\mathrm{s}})=\int_{c}\left[\psi(\boldsymbol{r}')(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}')-\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}c' \tag{4.18}$$

最后由式(3.52)和式(3.53)可得双站散射系数 $\sigma(\theta_{\mathrm{s}})$。为提高 Kirchhoff 近似计算结果的精度，可以进一步考虑遮蔽效应[7~11]对粗糙面散射的影响，散射系数可以表示为

$$\sigma_{遮蔽}(\theta_{\mathrm{s}})=S(\theta_{\mathrm{i}},\theta_{\mathrm{s}})\sigma(\theta_{\mathrm{s}}) \tag{4.19}$$

其中，遮蔽函数 $S(\theta_{\mathrm{i}},\theta_{\mathrm{s}})$ 可以表示为

$$S(\theta_{\mathrm{i}},\theta_{\mathrm{s}})=\begin{cases}[1+\mathrm{erf}(v_{\mathrm{s}})](1-\mathrm{e}^{-2B_{\mathrm{s}}})/(4B_{\mathrm{s}}), & 0\leqslant\theta_{\mathrm{s}}\leqslant\theta_{\mathrm{i}}\\ [1+\mathrm{erf}(v_{\mathrm{i}})](1-\mathrm{e}^{-2B_{\mathrm{i}}})/(4B_{\mathrm{i}}), & \theta_{\mathrm{i}}\leqslant\theta_{\mathrm{s}}\leqslant\pi/2\\ [\mathrm{erf}(v_{\mathrm{i}})+\mathrm{erf}(v_{\mathrm{s}})]\{1-\exp[-2(B_{\mathrm{i}}+B_{\mathrm{s}})]\}/[4(B_{\mathrm{i}}+B_{\mathrm{s}})], & \pi/2\leqslant\theta_{\mathrm{s}}\leqslant\pi\end{cases} \tag{4.20}$$

$$B_{\mathrm{s}(i)}=\left\{\frac{\exp(-9v_{\mathrm{s}(i)}^{2}/8)}{(3\pi v_{\mathrm{s}(i)}^{2})^{1/2}}+\frac{\exp(-v_{\mathrm{s}(i)}^{2})}{(\pi v_{\mathrm{s}(i)}^{2})^{1/2}}-[1-\mathrm{erf}(v_{\mathrm{s}(i)})]\right\}\Big/4 \tag{4.21}$$

$$v_{\mathrm{s}(i)}=\frac{|\tan\theta_{\mathrm{s}(i)}|\,l}{\sqrt{2}\,\delta} \tag{4.22}$$

其中，erf(·)是误差函数。

2. 数值结果的验证

下面分别以高斯粗糙面和 PM 海面为例，相关参数均以入射波长 λ 为单位，其中，锥形入射波中的宽度因子 $g=20\lambda$，粗糙面的总长度 $L=102.4\lambda$，粗糙面统计样本个数为 100。图 4.2 分别利用平面波入射时的 KA(传统 KA)、锥形波入射时的 KA(本节方法)及 MOM 计算了不同粗糙度下的高斯介质粗糙面的双站散射系数。通过比较可以看出，本节方法的计算结果与 MOM 结果吻合较好，而传统 KA 的计算结果在远离镜像方向与锥形波入射下的 KA 及 MOM 结果有较大差别，尤其在大散射角区域。

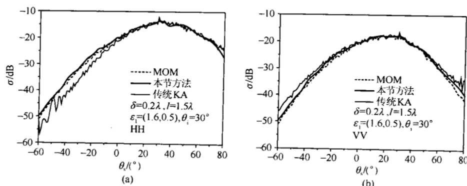


图 4.2　不同方法计算一维高斯介质粗糙面的双站散射系数比较

图 4.3 分别利用本节方法和 MOM 计算了不同极化方式、不同入射角下的一维 PM 谱理想导体海面的双站散射系数角分布。可以看出，本节方法与 MOM 的计算结果在大部分散射角范围内吻合得较好。

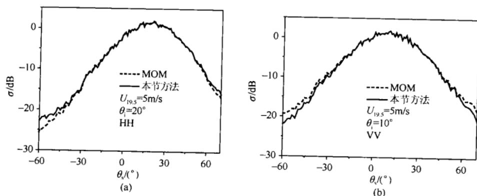


图 4.3　不同方法计算一维 PM 粗糙海面的双站散射系数比较

4.1.2　Kirchhoff 近似求解分层粗糙面的电磁散射

如图 4.4 所示，上层粗糙面 S_0 和下层粗糙面 S_1 将空间分为三部分，其中，上层空间，即区域 $\Omega_0(\varepsilon_0=1,\mu_0=1)$ 中的介质为自由空间，区域 1 中的介质为 $\Omega_1(\varepsilon_1,\mu_1=\mu_0)$，区域 2 中的介质为 $\Omega_2(\varepsilon_2,\mu_2=\mu_0)$，$\varepsilon_j,\mu_j(j=0,1,2)$ 分别为区域 Ω_j 中的相对介电常数和磁导系数，θ_i 和 θ_s 分别为入射角和散射角。上层粗糙面 S_0 和下层粗糙面 S_1 的高度起伏分别为 $z_0=f_0(x)$ 和 $z_1=f_1(x)$。$\delta_j,l_j(j=0,1)$ 表示上层或下层粗糙面的均方根高度及相关长度，d 为两层粗糙面之间的平均距离。

考虑入射波 $\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r})$ 入射到如图 4.5 所示的分层粗糙面上，粗糙面上任意一点 $\boldsymbol{r}_0$ 处的总场 $\psi(\boldsymbol{r}_0)$ 可以表示为

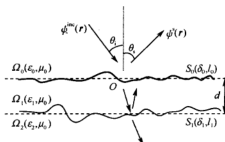


图 4.4　分层介质粗糙面散射示意图

$$\psi(\boldsymbol{r}_0)=\psi^{inc}(\boldsymbol{r}_0)+\psi^s(\boldsymbol{r}_0)\tag{4.23}$$

其中，$\psi^s(\boldsymbol{r}_0)$为散射场，包括了入射波 ψ^{inc}在上层粗糙面 S_0 产生的直接散射场 ψ_{00}^{sc}和经过上层粗糙面 S_0 透射进入 Ω_1，再由下层粗糙面 S_1 反射，最后由 S_0 二次透射进入 Ω_0 的透射波（间接散射场）ψ_{10}^{tr}，即 $\psi^s(\boldsymbol{r}_0)=\psi_{00}^{sc}(\boldsymbol{r}_0)+\psi_{10}^{tr}(\boldsymbol{r}_0)$。由格林定理可知空间任意点的散射场 $\psi^s(\boldsymbol{r})$可以表示为

$$\psi^s(\boldsymbol{r})=\int_{S_0}\left[\psi(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}-G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}\right]\mathrm{d}S_0\tag{4.24}$$

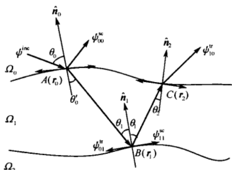


图 4.5　Kirchhoff 近似计算分层粗糙面散射示意图

同样，假设分层粗糙表面上每一点的曲率半径都远远大于入射波长，这样满足 Kirchhoff 的切平面近似，仍然利用菲涅耳定律可得

$$\psi_{00}^{sc}(\boldsymbol{r}_0)=R_{01}(\boldsymbol{r}_0)\psi^{inc}(\boldsymbol{r}_0)\tag{4.25a}$$

$$\frac{\partial\psi_{00}^{sc}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}=-R_{01}(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial\psi^{inc}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}\tag{4.25b}$$

反射系数 $R_{ij}(i,j=0,1,2)$可以表示为

$$R_{ij}(\boldsymbol{r}_0)=\begin{cases}\dfrac{\cos\theta_k-(\varepsilon_j/\varepsilon_i-\sin^2\theta_k)^{1/2}}{\cos\theta_k+(\varepsilon_j/\varepsilon_i-\sin^2\theta_k)^{1/2}}, & \text{HH}\\ \dfrac{\varepsilon_j/\varepsilon_i\cos\theta_k-(\varepsilon_j/\varepsilon_i-\sin^2\theta_k)^{1/2}}{\varepsilon_j/\varepsilon_i\cos\theta_k+(\varepsilon_j/\varepsilon_i-\sin^2\theta_k)^{1/2}}, & \text{VV}\end{cases}\tag{4.26}$$

其中，$\theta_k(k=0,1,2)$表示局部入射角(图 4.5)。由上层粗糙面 S_0 透射进入 Ω_1 的一次透射波 ψ_{01}^{tr} 及其对单位法向矢量的导数为

$$\psi_{01}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}_0)=T_{01}(\boldsymbol{r}_0)\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)\tag{4.27a}$$

$$\frac{\partial\psi_{01}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}=T_{01}(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}\tag{4.27b}$$

$T_{ij}=\rho_{ij}(1+R_{ij})$为透射系数，对于 HH 极化而言，$\rho_{ij}=1$；对于 VV 极化而言，$\rho_{ij}=\sqrt{\varepsilon_i/\varepsilon_j}$。从 $A(\boldsymbol{r}_0)$处进入 Ω_1 的透射波 ψ_{01}^{tr} 到达下层粗糙面 S_1 上的 $B(\boldsymbol{r}_1)$处，由菲涅耳定律可得

$$\sin\theta_0'=\sin\theta_0\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\tag{4.28}$$

易知

$$\psi_{11}^{\text{sc}}(\boldsymbol{r}_1)=R_{12}(\boldsymbol{r}_1)T_{01}(\boldsymbol{r}_0)\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sqrt{\varepsilon_1}|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0|}\tag{4.29a}$$

$$\frac{\partial\psi_{11}^{\text{sc}}(\boldsymbol{r}_1)}{\partial n_1}=-R_{12}(\boldsymbol{r}_1)T_{01}(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sqrt{\varepsilon_1}|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|}\tag{4.29b}$$

最终，由 ψ_{11}^{sc}到达 $C(\boldsymbol{r}_2)$(上层粗糙面 S_0)上的透射波 $\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}_2)$

$$\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}_2)=T_{10}(\boldsymbol{r}_2)R_{12}(\boldsymbol{r}_1)T_{01}(\boldsymbol{r}_0)\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\varphi}\tag{4.30a}$$

$$\frac{\partial\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}_2)}{\partial n_2}=T_{10}(\boldsymbol{r}_2)(-R_{12}(\boldsymbol{r}_1))T_{01}(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\varphi}\tag{4.30b}$$

其中，$A(\boldsymbol{r}_0)$与 $C(\boldsymbol{r}_2)$两点之间的相差 $\Delta\varphi=k\sqrt{\varepsilon_1}(|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|+|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0|)$。为了求得 $\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}_2)$，必须首先数值求得 $\Delta\varphi$，即利用数值方法确定 $B(\boldsymbol{r}_1)$和 $C(\boldsymbol{r}_2)$的位置，如图 4.6 所示，首先由已知点 A 确定出其在下层粗糙面 S_1 上的投影点 A'，同时可由 θ 确定出 B_1，然后确定出$B_1'\to B_1''\to B_2\to B_3\to\cdots\to B_{\text{num}}$来近似代替$B(\boldsymbol{r}_1)$。利用同样的方法也可以确定出 C_{num}以代替所要求的 $C(\boldsymbol{r}_2)$，最终，$A(\boldsymbol{r}_0)$与 $C(\boldsymbol{r}_2)$两点之间的相差可以利用所求的数值点表示为

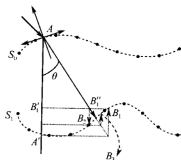


图 4.6　确定 $B_1'\to B_1''\to B_2\to B_3\to\cdots\to B_{\text{num}}$过程示意图

$$\Delta\varphi=k\sqrt{\varepsilon_1}(|AB_{\text{num}}|+|B_{\text{num}}C_{\text{num}}|)\tag{4.31}$$

将式(4.31)代入式(4.30)可得 ψ_{10}^{tr}，将上层粗糙面 S_0 上任意点处的入射波 ψ^{inc}，直接散射场 ψ_{00}^{sc}和透射场 ψ_{10}^{tr}相加可得到该点的总场 $\psi(\boldsymbol{r}_0)$，即

$$\psi(\boldsymbol{r}_0)=\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)+\psi_{00}^{\text{sc}}(\boldsymbol{r}_0)+\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}_0)\big|_{\text{if exist}}=\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)[1+R_{01}+T_{10}R_{12}T_{01}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\varphi}\big|_{\text{if exist}}] \tag{4.32a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}&=\frac{\partial\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}+\frac{\partial\psi_{00}^{\text{sc}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}+\frac{\partial\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}\bigg|_{\text{if exist}}\\&=\frac{\partial\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}[1-R_{01}-T_{10}R_{12}T_{01}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\varphi}\big|_{\text{if exist}}]\end{aligned} \tag{4.32b}$$

下面利用锥形波替换平面波，式(4.32a)和式(4.32b)可化为

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r}_0)&=\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)+\psi_{00}^{\text{sc}}(\boldsymbol{r}_0)+\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}_0)\big|_{\text{if exist}}=\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)[1+R_{01}+T_{10}R_{12}T_{01}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\varphi}\big|_{\text{if exist}}]\\&=\exp[\mathrm{i}k_0(x_0\sin\theta_{\mathrm{i}}-z_0\cos\theta_{\mathrm{i}})(1+w(\boldsymbol{r}_0))]\exp[-(x_0+z_0\tan\theta_{\mathrm{i}})^2/g^2]\\&\quad\times[1+R_{01}+T_{10}R_{12}T_{01}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\varphi}\big|_{\text{if exist}}]\end{aligned} \tag{4.33a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}&=\frac{\partial\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}+\frac{\partial\psi_{00}^{\text{sc}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}+\frac{\partial\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}\bigg|_{\text{if exist}}\\&=\exp[\mathrm{i}k_0(x_0\sin\theta_{\mathrm{i}}-z_0\cos\theta_{\mathrm{i}})(1+w(\boldsymbol{r}_0))]\exp\left[-\left(\frac{x_0+z_0\tan\theta_{\mathrm{i}}}{g}\right)^2\right]\\&\quad\times\left[-f_0(x_0)P_1+(1+\tan\theta_{\mathrm{i}})\frac{2(x_0+f_0(x_0)\tan\theta_{\mathrm{i}})}{g^2}P_2+P_3\right]\\&\quad\times[1-R_{01}-T_{10}R_{12}T_{01}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\varphi}\big|_{\text{if exist}}]\end{aligned} \tag{4.33b}$$

其中，k_0 为自由空间的入射波数，$w(\boldsymbol{r}_0)$及 P_1,P_2,P_3 的具体表达式同式(3.42)及式(4.11)～式(4.13)。将式(4.33a)和式(4.33b)代入式(4.24)中，再结合 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$及$\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}$的远场表达式(4.15)和式(4.16)即可求得空间任意点 $\boldsymbol{r}$ 处的散射场$\psi^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})$。最后利用式(4.19)～式(4.22)即可求得考虑遮蔽效应时分层粗糙面的双站散射系数。

以下数值结果以高斯粗糙面为例，相关参数以入射波长 λ 为单位，锥形入射波中的宽度因子 $g=20\lambda$，粗糙面的总长度 $L=102.4\lambda$，粗糙面统计样本个数为 100。假定两层粗糙面的粗糙度相同，即 $\delta_0=\delta_1=\delta, l_0=l_1=l$。图 4.7 利用本文方法计算了 HH 极化方式下分层无耗介质粗糙面的双站散射系数随 Ω_1 中介质相对介电常数 ε_1 的变化情况，其中，$\theta_{\mathrm{i}}=5°$，$\delta=0.1\lambda$，$l=1.2\lambda$，$\varepsilon_2=1.6$。可以发现，随着 ε_1 的增大，散射系数幅值在整个散射区域逐渐增大，这主要是因为当 ε_1 增大时，上层粗糙面 S_0 的反射增强，导致散射系数幅值增大。

图 4.8 计算了不同入射角、不同极化方式及不同粗糙度下分层无耗介质粗糙面的双站散射系数随 ε_2 的变化情况。图 4.8(a)给出了 VV 极化下的结果，其中，入射角 $\theta_{\mathrm{i}}=10°$，$\delta=0.15\lambda$，$l=1.0\lambda$，$\varepsilon_1=1.6$，ε_2 的变化范围为 $\varepsilon_2=1.6$～20；图 4.8(b)给出了 HH 极化下的结果，其中，$\theta_{\mathrm{i}}=5°$，$\delta=0.1\lambda$，$l=1.2\lambda$，$\varepsilon_1=20$，ε_2 的变化范围为 $\varepsilon_2=8$～50。从图 4.8(a)可以看出，当中间层介质的相对介电常数 ε_1 不大时($\varepsilon_1=1.6$)，随着 ε_2 的增大，分层粗糙面的散射系数幅值明显增大，并且是单调变化

的，这主要是因为当 ε_2 与 $\varepsilon_1=1.6$ 差异越大时，波在下层粗糙面 S_1 上的反射性越强所造成的。从图 4.8(b)可以看出，当 Ω_1 中相对介电常数 ε_1 较大($\varepsilon_1=20$)时，与图 4.8(a)不同的是，随着 ε_2 的增大，散射系数幅值在整个散射区域未出现明显的增大，这是因为当 $\varepsilon_1=20$，上层粗糙面 S_0 的反射性较强，进入 Ω_1 的透射波较少，所以 ε_2 的变化对散射系数幅值影响相较图 4.8(a)时变弱。另外，观察图 4.8(b)还发现，散射系数随 ε_2 的变化并非是单调的，当 $\varepsilon_2=8,50$ 时，双站散射系数的幅值较 $\varepsilon_2=15,30$ 时更大，这主要因为当 $\varepsilon_2=8,50$ 时，其值与 ε_1 差异 $\Delta\varepsilon=|\varepsilon_1-\varepsilon_2|$ 较大，下层粗糙面 S_1 的反射性较强，导致散射系数的幅值较大；而当 $\varepsilon_2=15,30$ 时，$\Delta\varepsilon$ 较小，S_1 反射性较弱，所以散射系数也越小。

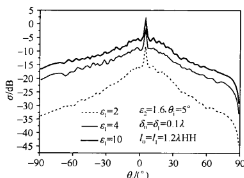


图 4.7　分层无耗介质粗糙面双站散射系数随相对介电常数 ε_1 的变化

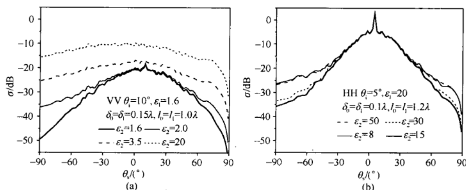


图 4.8　分层无耗介质粗糙面双站散射系数随相对介电常数 ε_2 的变化

图 4.9 计算了分层无耗介质粗糙面的双站散射系数随均方根高度的变化情况。可以看出，随着分层粗糙面均方根高度的增大，在镜向方向，散射系数幅值随均方根高度的增大而减小，而在远离镜向方向的散射角区域，双站散射系数幅值有所增大，这主要是随着分层粗糙面均方根高度的增大，粗糙面的粗糙度变

大，非相干散射分量增大，相干（镜向）散射分量减小所致。图 4.10 给出了分层无耗介质粗糙面的双站散射系数随粗糙面相关长度的变化情况。可以看出，随着相关长度的增大，粗糙面的双站散射系数在镜像附近逐渐增大而在非镜像方向逐渐减小。

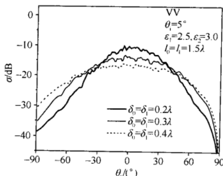


图 4.9 分层无耗介质粗糙面双站散射系数随均方根高度的变化

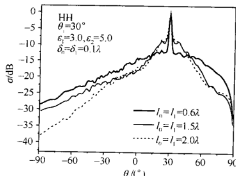


图 4.10 分层无耗介质粗糙面双站散射系数随相关长度的变化

图 4.11 计算了分层无耗介质粗糙面的双站散射系数随两层粗糙面之间的间距 d 的变化，各计算参数如图中所示，其中，图 4.11(a)和(b)中 ε_1 均为 1.6，ε_2 分别为 16 和 2。可以看出图 4.11(a)中的散射系数幅值随 d 的变化较图 4.11(b)更明显，这主要是因为在 ε_1 一定的情况下，ε_2 的值与 ε_1 相差越大(即 $\Delta\varepsilon=|\varepsilon_1-\varepsilon_2|$ 越大，图 4.11(a))，S_1 的反射性越强，d 的变化才有可能对散射系数有较大的影响。反之，当 ε_2 与 $\varepsilon_1=1.6$ 的 $\Delta\varepsilon$ 越小，d 的变化对于散射系数的影响就越小(图 4.11(b))，可以设想当 ε_2 与 ε_1 差异为零($\Delta\varepsilon=0$)，即 $\varepsilon_2=\varepsilon_1=1.6$ 时，双层粗糙面即退化为单层粗糙面，d 的变化即失去了意义。

在图 4.11(c)和(d)中 $\varepsilon_2=1.6$，ε_1 分别为 1.2 和 20。可以看出在 $\varepsilon_2=1.6$ 一定的情况下，图 4.11(c)中 $\varepsilon_1=1.2$，$\Delta\varepsilon=|\varepsilon_1-\varepsilon_2|$ 较小，但散射系数随 d 的变化却较图 4.11(d)明显，这与图 4.11(a)和(b)所得结论似乎相互矛盾(按照图 4.11(a)和(b)的结论，$\Delta\varepsilon$ 越大，d 的变化对散射系数的影响越大)。事实上，对于分层粗糙面散射而言，不能将各层相对介电常数的影响割裂开来考虑，必须综合考虑各介质层的相对介电常数以及它们之间的相互作用对散射系数的影响。电磁波首先从 Ω_0 进入 Ω_1，所以应该先考虑 S_0 对波的反射性，图 4.11(c)中 $\varepsilon_1=1.2$ 越接近 $\varepsilon_0=1$，S_0 对波的反射性越弱，相较图 4.11(d)($\varepsilon_1=20$)，进入 Ω_1 的波就越多，因此，d 的变化才可能对散射系数的影响大，然后波在 S_1 处发生反射，此时就需要考虑 S_1 的反射性，图 4.11(d)中，$\varepsilon_1=20$，$\varepsilon_2=1.6$ 表明 S_1 对波的反射性较图 4.11(c)大，但因整个过程中 S_0 的反射性在决定散射系数大小中起关键性作用，所以此时散射系

数幅值的大小更多决定于$|\varepsilon_0-\varepsilon_1|$，所以图 4.11(c)中 d 的变化对于双站散射系数的影响较大。

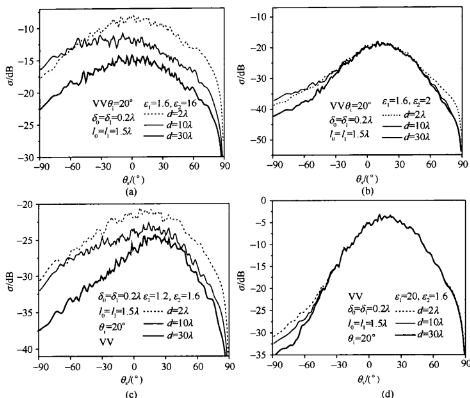


图 4.11　分层无耗介质粗糙面双站散射系数随 d 的变化

另外，对于图 4.11(a)和(b)而言，因为 $\varepsilon_1=1.6$ 一定，所以 S_0 对波的反射性相同，此时散射系数的大小主要由 S_1 的反射性决定，即主要考虑$|\varepsilon_1-\varepsilon_2|$的大小，所以图 4.11(a)中$|\varepsilon_1-\varepsilon_2|$较图 4.11(b)大，散射系数幅值随 d 的变化也就较图 4.11(b)更明显。

4.2　Kirchhoff 近似结合矩量法求解一维分层粗糙面电磁散射

本节基于 Kirchhoff 近似及矩量法研究了分层粗糙面电磁散射问题[12]。首先利用 MOM 代替 KA 得到上层粗糙面任意点的总场，包括入射场及由其激发的直接散射场，然后基于 4.1 节求解分层粗糙面的透射场，将两种方法所得到的粗糙表面任意点的场叠加得到总场后，由格林定理得到空间任意点的散射场，从而求得分

层介质粗糙面的双站散射系数。

4.2.1 基本理论

考虑入射波 $\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r})$ 入射到如图 4.4 所示的分层介质粗糙面上，假定 $\psi_0(\boldsymbol{r})$，$\psi_1(\boldsymbol{r})$ 分别表示粗糙面 S_0 上表面(位于 Ω_0)及下表面(位于 Ω_1)任意点的总场，它们分别满足边界方程[3]

$$\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\psi_0(\boldsymbol{r}) - \int_{\text{P.V.}} \mathrm{d}s\psi_0(\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \int_s \mathrm{d}sG_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\psi_0(\boldsymbol{r}') \tag{4.34}$$

$$\frac{1}{2}\psi_1(\boldsymbol{r}) + \int_{\text{P.V.}} \mathrm{d}s\psi_1(\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \int_s \mathrm{d}sG_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\psi_1(\boldsymbol{r}') = 0 \tag{4.35}$$

其中，$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 分别为 Ω_0 和 Ω_1 中的格林函数。$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为粗糙面 S_0 上任意点的单位法向矢量。$\psi_0(\boldsymbol{r})$，$\psi_1(\boldsymbol{r})$ 满足边界条件

$$\psi_0(\boldsymbol{r}) = \psi_1(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S_0 \tag{4.36a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\psi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\psi_1(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S_0 \tag{4.36b}$$

将式(4.34)和式(4.35)沿 x 方向离散，结合式(4.36a)和式(4.36b)的边界条件，并利用 MOM 可得如下矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{\boldsymbol{A}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{B}}} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{C}}} & \rho\bar{\bar{\boldsymbol{D}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_i(x) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

其中，$V_1(x)=\psi_0(\boldsymbol{r})|_{r\in S_0}$，$V_2(x)=u(x)=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}x}\right)^2}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\psi_0(\boldsymbol{r}))|_{r\in S_0}$，对于 VV 极化 $\rho=\varepsilon_1/\varepsilon_0$，对于 HH 极化 $\rho=1$，式(4.37)中矩阵块 $\bar{\bar{\boldsymbol{A}}}$，$\bar{\bar{\boldsymbol{B}}}$，$\bar{\bar{\boldsymbol{C}}}$，$\bar{\bar{\boldsymbol{D}}}$ 中元素的具体表达式可分别参见式(3.26)、式(3.30)及式(3.57)。

通过解矩阵方程(4.37)，可以求得介质粗糙面上方的 $\psi_0(\boldsymbol{r})$ 及 $\hat{\boldsymbol{n}}_0 \cdot \nabla\psi_0(\boldsymbol{r})$，这里并未考虑由于 S_1 存在而产生的透射波 $\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r})$(图 4.5)，为了得到 S_0 上方任意点的总场 $\psi(\boldsymbol{r})=\psi_0(\boldsymbol{r})+\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r})$，需要利用锥形波入射下的 Kirchhoff 近似计算得到透射波 $\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r})$(具体求解过程参见 4.1.2 小节)

$$\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}) = T_{10}(\boldsymbol{r})R_{12}(\boldsymbol{r}_1)T_{01}(\boldsymbol{r}_0)\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sqrt{\varepsilon_1}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0|)} \tag{4.38a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\psi_{10}^{\text{tr}}(\boldsymbol{r}) = T_{10}(\boldsymbol{r})(-R_{12}(\boldsymbol{r}_1))T_{01}(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial\psi^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial n_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sqrt{\varepsilon_1}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0|)} \tag{4.38b}$$

将锥形波引入上式，则式(4.38a)和式(4.38b)可化为

$$\psi_{10}^{\mathrm{tr}}(\boldsymbol{r}) = \exp[\mathrm{i}k_0(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)(1+w(\boldsymbol{r}))]\exp\left[-\left(\frac{x+z\tan\theta_i}{g}\right)^2\right]$$
$$\times T_{10}(\boldsymbol{r})R_{12}(\boldsymbol{r}_1)T_{01}(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\sqrt{\varepsilon_1}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0|)} \tag{4.39a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla\psi_{10}^{\mathrm{tr}}(\boldsymbol{r}) = T_{10}(\boldsymbol{r})(-R_{12}(\boldsymbol{r}_1))T_{01}(\boldsymbol{r}_0)\exp[\mathrm{i}k_0(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)(1+w(\boldsymbol{r}))]$$
$$\times\exp\left[-\left(\frac{x+z\tan\theta_i}{g}\right)^2\right]\left[-f_0(x)P_1 + \frac{2(x+f_0(x)\tan\theta_i)}{g^2}P_2\right.$$
$$\left.+P_3 + \frac{2\tan\theta_i(x+f_0(x)\tan\theta_i)}{g^2}P_2\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\sqrt{\varepsilon_1}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0|)} \tag{4.39b}$$

其中，$w(\boldsymbol{r})$及 P_1, P_2, P_3 的表达式详见式(3.42)和式(4.11)～式(4.13)。

至此，利用 MOM 结合锥形波入射下的 KA 可以得到 S_0 上任意点的总场

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_0(\boldsymbol{r}) + \psi_{10}^{\mathrm{tr}}(\boldsymbol{r})\big|_{\text{if exist}} \tag{4.40a}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla\psi = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\psi_0(\boldsymbol{r}) + \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla\psi_{10}^{\mathrm{tr}}(\boldsymbol{r})\big|_{\text{if exist}} \tag{4.40b}$$

散射场的表达式同式(4.17)，其中

$$\psi_s^{(N)} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left\{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla\psi\big|_{z=f_0(x)}\sqrt{1+f_0'(x)^2} - \psi(x)\mathrm{i}k_0[f_0'(x)\sin\theta_s - \cos\theta_s]\right\}$$
$$\times\exp[-\mathrm{i}k_0(x\sin\theta_s - f_0(x)\cos\theta_s)] \tag{4.41}$$

4.2.2　数值计算结果及讨论

图 4.12 分别利用本节方法和 4.1.2 小节的方法计算了单层、分层介质糙面双站散射系数，相关的计算参数如图中所示，其中，实线为本节方法的计算结果，虚线为 4.1.2 小节方法的计算结果。如图 4.12(a)所示，当分层粗糙面退化成单层粗糙面时，本节方法即退化为 MOM。显然，KA 的计算结果只在镜向附近与 MOM 重合得很好，因为此时粗糙面的粗糙度较大，KA 已经不再适用了，当散射角远离镜向方向，结果与 MOM 差异较大，很不准确。图 4.12(b)给出了分层介质粗糙面的双站散射结果，与单层情形类似，在镜向及镜向附近的散射区域，KA 的结果与

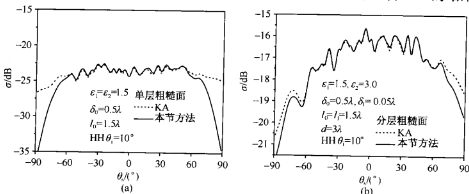


图 4.12　本节方法与 4.1 节方法计算结果的比较

本节方法吻合较好，但在大散射角区域（$\theta_s>60°$），KA 的计算结果有较大的误差，因为本节方法在计算上层粗糙面散射时采用了精确的数值算法 MOM 代替 KA，所以较 4.1.2 小节中的单纯 KA 计算分层粗糙面双站散射结果更为准确，尤其对于大粗糙度的情形。需要指出的是，图 4.12(b)中分层粗糙面中 S_0 的粗糙度其实已经不满足 KA 计算条件（$\delta_0=0.5\lambda$），这里只是为了突出本节方法在考虑 MOM 后对单纯 KA 方法计算分层粗糙面结果的修正作用。

图 4.13 给出了利用本节方法得到的分层与单层粗糙面双站散射结果的比较，其中，Ω_1 中介质的相对介电常数为 $\varepsilon_1=1.6$，Ω_2 中介质的相对介电常数为 $\varepsilon_2=2.5$。可以发现，分层介质粗糙面的双站散射系数在除了镜向附近外的大部分散射角区域均比单层粗糙面的散射系数幅值大很多。这主要是因为对于单层粗糙面而言，远区散射场仅仅是入射波到达 S_0 产生的直接散射场，而对于分层粗糙面而言，散射场不仅包含直接散射场，也包含了入射波进入 Ω_1 到达下层粗糙面 S_1 发生反射再透射进入自由空间的透射场 ψ_{10}^{sc}，所以分层粗糙面的双站散射系数幅值在大部分散射角区域比单层粗糙面的散射系数幅值大。

在实际分层粗糙面模型中，上、下层粗糙面的粗糙度通常是不相同的，并且粗糙面粗糙度参数的改变意味着相关长度和均方根高度同时变化，图 4.14 利用本节方法计算了上、下层粗糙面粗糙度不同时的双站散射系数角分布。其中，曲线(1)，(2)是在上层粗糙面参数为 $\delta_0=0.3\lambda$，$l_0=1.2\lambda$ 时，下层粗糙面的粗糙度发生变化时对应的散射系数结果；曲线(3)，(4)是在上层粗糙面的粗糙度为 $\delta_0=0.2\lambda$，$l_0=1.5\lambda$ 时，下层粗糙面的粗糙度改变时对应的散射系数结果。分别对比图中曲线(1)，(3)和曲线(2)，(4)可以发现，在下层粗糙度相同条件下，随着上层粗糙面粗糙度的改变，分层粗糙面的双站散射系数有较大的变化，而当上层粗糙面粗糙度确定时，随着下层粗糙度的改变，曲线(1)，(2)几乎重合，曲线(3)，(4)也相差无几，这表明分层粗糙面的双站散射系数主要由上层粗糙面的粗糙度所决定的。

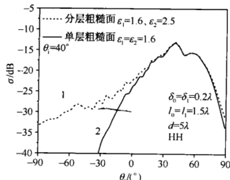


图 4.13 利用本节方法分别计算分层、单层粗糙面的双站散射系数

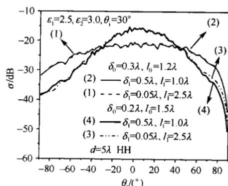


图 4.14 本节方法计算的分层介质粗糙面双站散射系数随粗糙度的变化

4.3　时域有限差分法在分层粗糙面电磁散射中的应用

时域有限差分法的理论通用性很强，3.3节二维FDTD方法的理论对所有一维粗糙面散射问题都适用，包括一维单层、分层以及一维粗糙面和二维目标的复合散射，其差别仅在于计算区域中某些位置电磁特性参数的不同。同样，3.5.4小节的内容是所有二维粗糙面散射问题的理论基础。本节运用时域有限差分法研究一维[13]、二维分层粗糙面的电磁散射特性，其理论基础不再赘述，仅给出相关数值结果。

4.3.1　一维分层粗糙面的FDTD方法研究

图4.15给出了分层粗糙面FDTD计算区域的划分模型[13]，这里采用UPML介质作为FDTD计算区域的最外层。

图4.16分析了上、下分界面分别是平面和粗糙面时两层有耗、无耗介质的双站散射系数角分布，其中，入射波长$\lambda=0.3\text{m}$，粗糙面长度$L=180\lambda$。当上、下两层分界面为高斯粗糙面时，它们的均方根和相关长度分别为$\delta_0=0.1\lambda$，$l_0=1.0\lambda$和$\delta_0=0.2\lambda$，$l_0=1.5\lambda$。有耗介质的相对介电常数分别为$\varepsilon_1=(2.5,0.18)$，$\varepsilon_2=(9.8,1.2)$；无耗介质的相对介电常数分别为$\varepsilon_1=2.5$，$\varepsilon_2=9.8$；两层粗糙面的距离$d=2.0\lambda$。空间间隔$\Delta x=\Delta y=\Delta=\dfrac{\lambda}{20}$，UPML层的厚度为$5\Delta$。由图4.16可知无论分界面是平面还是粗糙面，VV极化(图4.16(a))和HH极化(图4.16(b))时无耗介质的散射系数在整个散射角范围内都大于有耗介质的结果。另外，在其他条件一致的情况下，粗糙面的散射系数在除了镜向方向外的大多数散射角范围内均大于平面的散射系数。

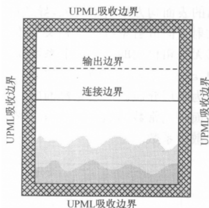


图4.15　一维分层粗糙面的FDTD计算区域划分

为了进一步探索两层粗糙面的电磁散射特性，图4.17研究了粗糙面的均方根高度一定的情况下($\delta_0=\delta_1=0.2\lambda$)，HH极化时两层粗糙面的双站散射系数角分布随相关长度的变化，其中，入射角为10°，入射波长$\lambda=0.3\text{m}$。上、下两层粗糙面的相对介电常数分别为$\varepsilon_1=(2.5,0.18)$，$\varepsilon_2=(9.8,1.2)$，上层粗糙面的厚度为$d=$

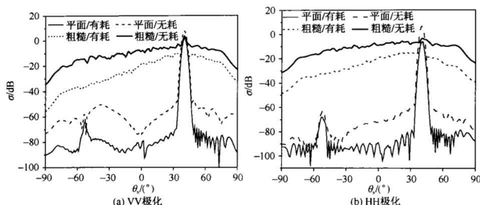


图 4.16　分界面是平面和粗糙面时两层有耗、无耗介质的双站散射系数，$\theta_i=40°$

2.0λ。从图中不难发现双站散射系数在镜向方向附近的散射角范围内随着相关长度的减小而减小，而在远离镜向方向散射系数随着相关长度的减小而增大。这是由于当均方根相同时，粗糙面的粗糙度是相同的，随着相关长度的减小，粗糙面的表面均方根斜率增大，导致散射场能量在更宽的范围内分布，所以在非相干散射方向散射系数随着相关长度的减小而增大。图 4.18 分析了 VV 极化下两层无耗粗糙面的双站散射系数随着下层粗糙面相对介电常数 ε_2 的变化规律，其中，$\varepsilon_1=2.5$，ε_2 分别为 1.5，2.5，3.5，5.0 和 9.8。当 $\varepsilon_2=2.5$ 时，两层介质即退化为单层介质。两层粗糙面的其他参数如图 4.17 所示。由图可知当上、下层粗糙面介电常数的 $\Delta\varepsilon=|\varepsilon_2-\varepsilon_1|$ 越小，两层粗糙面的散射系数越接近单层粗糙面的散射系数。

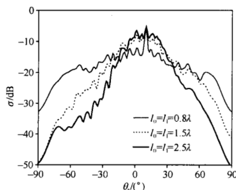


图 4.17　分层粗糙面的散射系数随着相关长度的变化

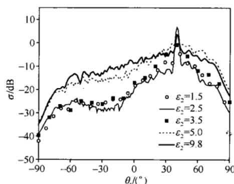


图 4.18　无耗分层粗糙面的散射系数随着 ε_2 的变化

另外，对于两层粗糙面的散射系数随着上层粗糙面的厚度 d 的变化规律与4.1.2小节的结果类似，这里不再给出。

4.3.2　二维分层粗糙面的FDTD方法研究

图4.19给出了二维分层粗糙面电磁散射示意图，入射角和入射方位角分别为 θ_i 和 ϕ_i，散射角和散射方位角分别为 θ_s 和 ϕ_s。以入射面 xOz 面为参考面，那么入射方位角 $\phi_i=180°$。上、下两层二维粗糙面均满足高斯分布，它们之间的间距为 d。关于FDTD方法求解二维分层粗糙面电磁散射的理论基础参见3.5.4小节[14]，下面以水平极化入射波为例分析两层粗糙面的散射系数角分布。

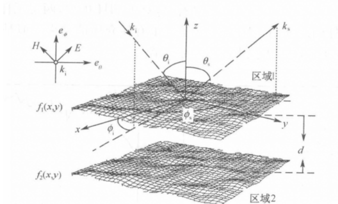


图4.19　二维高斯分层粗糙面散射示意图

图4.20计算了HH极化下，上层界面为平面、下层界面是粗糙面（$\delta_2=$

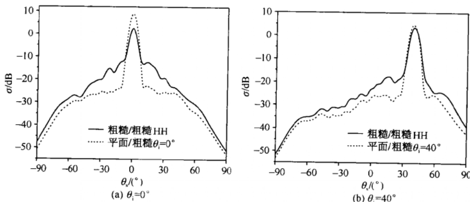


图4.20　不同上层界面粗糙度下的散射系数角分布

$0.2\lambda, l_{2x}=l_{2y}=1.3\lambda$)以及上下两界面均是粗糙面($\delta_1=0.1\lambda, l_{1x}=l_{1y}=1.0\lambda, \delta_2=0.2\lambda, l_{2x}=l_{2y}=1.3\lambda$)时的双站散射系数角分布。这里,$d=2\lambda$,上、下介质层的相对介电常数分别为 $\varepsilon_1=(3.7,0.13)$和 $\varepsilon_2=(16.16,1.15)$,对应于含水量分别为 5%和 30%的土壤[15]。图 4.20(a)和(b)中的入射角分别为 0°和 40°。由图 4.20 可知上层界面为粗糙面时的双站散射系数在除了镜向方向的散射角范围内均大于上层界面为平面时的散射系数,但大散射角方向时,两者的散射系数比较接近。

图 4.21 分析了同极化(HH)和交叉极化(HV)下两层有耗、无耗粗糙面($\delta_1=0.1\lambda, l_{1x}=l_{1y}=1.0\lambda, \delta_2=0.2\lambda, l_{2x}=l_{2y}=1.3\lambda, d=2\lambda$)的散射系数角分布。图中无耗介质的相对介电常数为 $\varepsilon_1=3.7, \varepsilon_2=16.16$,有耗介质的相对介电常数为 $\varepsilon_1=(3.7,0.13), \varepsilon_2=(16.16,1.15)$。可以看出,对于 HH 极化,两层无耗介质的散射系数在除镜向外的散射角范围内都远远大于有耗介质的结果。但是对于 VH 极化而言,前者在整个散射角范围内都大于后者。

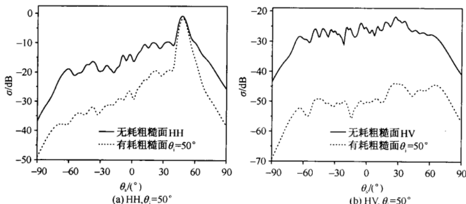


图 4.21 不同极化下有耗和无耗分层粗糙面的散射系数角分布

图 4.22 研究了不同散射角下二维高斯分层粗糙面的散射系数随方位角的变化情况。图中入射角为 20°,其他参数与图 4.21 相同。由图可知当 HH 极化的散射系数达到最大值时,VH 极化的散射系数达到最小值。同理,当 HH 极化的散射系数达到最小值时,VH 极化的散射系数达到最大值。另外,当散射角 $\theta_s=5°$ 时,图 4.22(a)中的同极化和交叉极化散射系数几乎关于 $\phi_s=90°$对称,但随着散射角的增大,同极化散射系数的最大值和交叉极化散射系数的最小值都向前向 $\phi_s=180°$处移动。

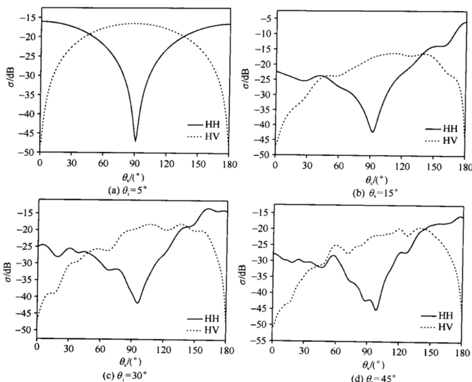


图4.22　不同散射角下二维高斯分层粗糙面的散射系数随着方位角的变化

参考文献

[1] Ogilvy J A. Theory of Wave Scattering from Random Rough Surface. Bristol: Adam Hilger, 1991.

[2] Thorsos E. The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum. J Acoust Soc Am, 1988, 83: 78～91.

[3] Tsang L, Kong J A, Ding K H. Scattering of Electromagnetic Waves. New York: John Wiley & Sons. Inc, 2001.

[4] 金亚秋，刘鹏，叶红霞. 随机粗糙面与目标复合散射数值模拟理论与方法. 北京：科学出版社，2008.

[5] Ye H X, Jin Y Q. Parameterization of the tapered incident wave for numerical simulation of electromagnetic scattering from rough surface. IEEE Trans Antennas Propagat, 2005, 53(3): 1234～1237.

[6] 汪茂光. 几何绕射理论. 第2版. 西安：西安电子科技大学出版社，1994.

[7] Bourlier C, Berginc G, Saillard J. Theoretical study on two-dimensional Gaussian rough sea surface emission and reflection in the infrared frequencies with shadowing effect. IEEE Trans Geosci and Remote Sensing, 2001, 39(2): 379～392.

[8] Bourlier C, Saillard J, Berginc G. Effect of correlation between shadowing and shadowed points on the Wagner and Smith monostatic one-dimensional shadowing functions. IEEE Trans Antennas Propagat,

2000,48(3): 437～446.

[9] Bourlier C, Berginc G. Shadowing function with single reflection from anisotropic Gaussian rough surface: application to Gaussian, Lorentzian and sea correlations. Waves in Random Media, 2003, 13: 27～58.

[10] Bourlier C, Berginc G, Saillard J. Bistatic scattering coefficient from one-and two-dimensional random surfaces using the stationary phase and scalar approximation with shadowing effect: comparisons with experiments and application to the sea surface. Waves in Random Media, 2001, 11: 119～147.

[11] Bourlier C, Berginc G, Saillard J. One and two-dimension shadowing functions for height and slope stationary uncorrelated surface in the monostatic and bistatic configuration. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2002, 50(3): 312～324.

[12] Wang R, Guo L X. Numerical simulations of wave scattering from two-layered rough surface. Progress in Electromagnetics Research B, 2008, 10: 63～175.

[13] Li J, Guo L X, Zeng H. FDTD investigation on electromagenetic scattering from two-layered rough surfaces under UPML absorbing condition. Chin Phys Lett, 2009, 26(3): 034101-1～034101-4.

[14] Li J, Guo L X, Zeng H. FDTD investigation on bistatic scattering from two-dimensional rough surface with UPML absorbing condition. Waves in Random and Complex Media, 2009, 19(3): 418～429.

[15] Wang J R, Schmugge T J. An empirical model for the complex dielectric permittivity of soils as function of water content. IEEE Trans Geosci. Remote Sensing, 1980, 18(4): 288～295.

第 5 章　动态海面散射杂波特征分析

通常，海面上飞行的机载雷达采用下视工作状态才能在较高的飞行高度上发现低空目标，这样雷达回波信号中不可避免地包含有海面和海面上其他物体的反射信号，即对目标预警产生海杂波干扰，强的杂波干扰会把有用的信号湮没，因此，自雷达问世以来，杂波的理论研究和实验测定就一直伴随着雷达技术的发展而不断深入。对于海洋雷达来说，它被动地接收海洋信号中包含的海杂波，并且其在信号中的比重和雷达的工作频率、电磁波的极化状态、照射条件及海面风速、风向等有密切关系，因此，海杂波在很大程度上影响了雷达对海上目标的预警能力。现代海洋雷达要求具有更高的分辨率和可靠的监测性能，因此，有必要对海面散射回波（海杂波）特性进行精确的分析，以降低其虚警率。本章主要针对动态海面散射杂波的幅值分布统计特征，散射回波的多普勒谱特征以及混沌、分形特征进行讨论和分析。

5.1　动态海面散射杂波的幅值分布

较早的海杂波分布特性研究是基于高斯假设，即认为杂波幅值满足瑞利（Rayleigh）分布，并且当雷达分辨率较低时，该假设与实际情况符合得很好，理论上也可以从中心极限定理导出，但随着雷达分辨单元的减小，或雷达工作在小擦地角时，常常发现海杂波是偏离高斯分布的，而且拖尾更长，此时海杂波不符合单参数的瑞利分布。随着对海杂波研究的深入，先后建立了一系列杂波模型，可以在一定程度上描述海杂波的分布特性。目前，用来描述海杂波幅值分布的几种典型模型有瑞利分布（RL）[1]、对数正态（lognormal）分布（LN）[2]、韦布尔（Weibull）分布（WB）[3]和 K 分布（K-dist，KD）[4]等，其中，瑞利分布是韦布尔分布的特殊情况。与瑞利分布相比，对数正态分布通常会过高地估计杂波的分布范围。韦布尔分布具有两个参数，能够在低掠入射或分辨率较高时与杂波的实际分布更加吻合。K 分布具有明显的物理意义，可以从严格的数学公式推导得到，并且当形状参数趋向于无穷大时，K 分布退化为瑞利分布，当形状参数等于 0.5 时，K 分布与韦布尔分布是等同的。

5.1.1　最大似然估计法

若估计样本的总体 X 是离散型随机变量，其分布律表示为 $P\{X=x\}=p(x,\theta)(\theta\in\Theta)$ 的形式是已知的，θ 为待估计参数，Θ 是 θ 可能的取值范围。设 X_1，

$X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布律为[5] $\prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$，其中，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个样本值。根据概率论的知识可以知道样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 取到观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的概率，即事件 $\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$ 发生的概率为

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta), \quad \theta \in \Theta \tag{5.1}$$

其中，$L(\theta)$ 为样本的似然函数表示这一概率随 θ 取值的变化。最大似然估计法就是要在 θ 的可能取值范围 Θ 内挑选使概率 $L(\theta)$ 达到最大的参数值 θ，即取 $\hat{\theta}$ 满足

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}) = \max L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta), \quad \theta \in \Theta \tag{5.2}$$

其中，$\hat{\theta}$ 称为参数 θ 的最大似然估计量。

若估计样本的总体 X 是连续型随机变量，其概率密度函数为 $f(x, \theta)(\theta \in \Theta)$，与上面类似地，可以得到其最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 依然满足式(5.2)，只是其中的似然函数 $L(\theta)$ 变为

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta), \quad \theta \in \Theta \tag{5.3}$$

在很多情形下，$p(x, \theta)$ 和 $f(x, \theta)$ 关于参数 θ 是可微的，这时最大似然估计量参数 $\hat{\theta}$ 可从下面的方程求得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} L(\theta) = 0 \tag{5.4}$$

又因为 $L(\theta)$ 与 $\ln L(\theta)$ 在同一 θ 处取得极大值，因此，最大似然估计量参数 $\hat{\theta}$ 也可以从方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \ln L(\theta) = 0 \tag{5.5}$$

求得，而且采用后一方程求解更方便。

最大似然估计法也适用于分布中含有多个参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的情况。这时，最大似然函数 L 是这些未知参数的函数，分别令

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} L = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \tag{5.6a}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \tag{5.6b}$$

计算求得。

5.1.2 分布模型及其参数估计

1. 瑞利分布

瑞利分布的概率密度函数(PDF)表达式为

$$p(x)=\frac{2x}{\alpha^2}\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right],\quad x>0 \tag{5.7}$$

从式(5.7)可以看出瑞利分布是一个单参数函数。

瑞利分布的累计概率密度函数(CDF)表达式为

$$C(x)=1-\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right] \tag{5.8}$$

它的 n 阶矩表达式为

$$M_n=\alpha^n\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) \tag{5.9}$$

其中，$\Gamma(\cdot)$是伽马函数。利用最大似然估计法可以得到参数 α 的最大似然估计量为

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2 \tag{5.10}$$

其中，N 是样本的个数，X_i 是每个样本的观测值。

2. 对数正态分布

对数正态分布的概率密度函数表达式为

$$p(x)=\frac{1}{x(\pi\alpha)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(\ln x-m)^2}{\alpha}\right\},\quad x>0 \tag{5.11}$$

即任意样本观测值 x 满足对数正态分布，当且仅当其对数 $\ln x$ 是均值为 m、方差为 $\alpha/2$ 的正态分布。

对数正态分布的累计概率密度函数表达式为

$$C(x)=1-\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left\{\frac{\ln x-m}{\alpha^{1/2}}\right\} \tag{5.12}$$

其中，$\operatorname{erfc}(\cdot)$是余误差函数。对数正态分布的 n 阶矩表达式为

$$M_n=\exp(nm+0.5n^2\alpha) \tag{5.13}$$

按照最大似然估计法可以得到相应的估计量为

$$\hat{m}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln X_i \tag{5.14}$$

$$\hat{\alpha}=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(\ln X_i-\hat{m})^2 \tag{5.15}$$

3. 韦布尔分布

韦布尔分布的概率密度函数表达式为

$$p(x)=\frac{p}{q}\left(\frac{x}{q}\right)^{p-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{q}\right)^p\right],\quad x>0,p>0,q>0 \tag{5.16}$$

其中，参数 q 是尺度参数，参数 p 是形状参数。

韦布尔分布的累计概率密度函数表达式为

$$C(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{q}\right)^{p}\right] \tag{5.17}$$

韦布尔分布的 n 阶矩表达式为

$$M_n = q^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right) \tag{5.18}$$

按照最大似然估计法估计参数时需要用到数值方法，而且收敛慢，文献[6]中给出了如下一种较为有效的估计方法：

$$\hat{p} = \left\{\frac{6N}{\pi^2(N-1)}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\ln X_i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln X_i\right)^2\right]\right\}^{-1/2} \tag{5.19}$$

$$\hat{q} = \exp\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln X_i + 0.5772\hat{p}^{-1}\right) \tag{5.20}$$

4. *K* 分布

K 分布的概率密度函数表达式为

$$p(x) = \frac{2}{\alpha\Gamma(v+1)}\left(\frac{x}{2\alpha}\right)^{v+1} K_v\left(\frac{x}{\alpha}\right) \tag{5.21}$$

其中，参数 v 是形状参数，参数 α 为尺度参数，$K_v(\cdot)$表示第二类修正 v 阶 Bessel 函数。

K 分布的累计概率密度函数表达式为

$$C(x) = 1 - \frac{2}{\Gamma(v+1)}\left(\frac{x}{2a}\right)^{v+1} K_{v+1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{5.22}$$

n 阶矩的表达式为

$$M_n = \frac{2^n\alpha^n\Gamma(0.5n+1)\Gamma(0.5n+v+1)}{\Gamma(v+1)} \tag{5.23}$$

由于 K 分布不能由初等函数来表示，采用最大似然估计法很难得到参数的最佳估计量，但对 K 分布参数估计已提出多种方法，这里采用如下两种方法：

1) 基于矩的估计方法

通过计算可以发现下面的比值 α_m：

$$\alpha_m = \frac{M_{2m}}{M_m^2}, \quad m = 1,2,\cdots \tag{5.24}$$

是一个只与形状参数 v 有关的量，因此，可以用式(5.24)估计参数 v，再代入任意阶矩方程(5.23)中计算尺度参数 α。下面分别介绍基于一阶和二阶样本矩估计方法和基于二阶和四阶样本矩估计方法。

基于一阶和二阶样本矩估计，即式(5.24)中取 $m=1$ 可以得到

$$\frac{M_2}{M_1^2}=\frac{4(v+1)[\Gamma(v+1)]^2}{\pi[\Gamma(v+1.5)]^2} \tag{5.25}$$

用数值方法求解此方程可得参数 v 的值,然后利用下式得出尺度参数:

$$\hat{\alpha}=\frac{\Gamma(v+1.5)M_1}{\Gamma(v+1)\sqrt{\pi}} \tag{5.26}$$

基于二阶和四阶样本矩估计,即式(5.24)中取 $m=2$ 可得到

$$\hat{v}=\frac{2M_2^2}{M_4-2M_2^2} \tag{5.27}$$

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_2}{v+1}} \tag{5.28}$$

可以看出,基于二阶和四阶样本矩估计方法具有计算简单、不需要数值求解的优点,因此,该方法是一种常用的参数估计方法。但由于高阶矩对数据的敏感性,数据处理时要尽量取低阶矩。Iskander 和 Zoubir[7]在整数阶矩方法的基础上进行推广,利用分数阶矩来估计 K 分布的参数。与整数阶矩方法类似,取一个与参数 α 无关的比值,即

$$\alpha_{p,p}=\frac{M_{p+2q}}{M_pM_{2q}},\quad p>0,\quad q=1,2,\cdots \tag{5.29}$$

易知当 $p=2q$ 时,式(5.29)退化为基于整数阶矩的方法。若尽量取低阶矩,令 $q=1$ 可得

$$\alpha_{p,1}=\frac{M_{p+2}}{M_pM_2} \tag{5.30}$$

将式(5.30)代入式(5.23)可以得到形状参数

$$v=\frac{((p+2)/2)^2-\alpha_{p,1}}{\alpha_{p,1}-(p+2)/2} \tag{5.31}$$

若 $p=2$ 时,分数阶矩的估计式(5.29)即为常规的基于二阶矩和四阶样本矩方法。若令 $p=1$,可得到基于一阶、二阶和三阶样本矩的估计为

$$v=\left(\frac{9}{4}-\frac{M_3}{M_1M_2}\right)\Big/\left(\frac{M_3}{M_1M_2}-\frac{3}{2}\right),\quad \frac{M_3}{M_1M_2}\neq\frac{3}{2} \tag{5.32}$$

当 p 取分数形式时,若 $p=1/2$,则

$$v=\left(\frac{25}{16}-\frac{M_{5/2}}{M_{1/2}M_2}\right)\Big/\left(\frac{M_{5/2}}{M_{1/2}M_2}-\frac{5}{4}\right),\quad \frac{M_{5/2}}{M_{1/2}M_2}\neq\frac{5}{4} \tag{5.33}$$

2) 基于样本算术平均和几何平均的方法[8]

定义样本 X 的算术平均和几何平均分别为

$$m_a=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i,\quad m_g=\left(\prod_{i=1}^{N}X_i\right)^{1/N} \tag{5.34}$$

则两者比值的期望值为

$$E\left(\frac{m_a}{m_g}\right)=\frac{\Gamma(1.5+v-0.5n^{-1})\Gamma(v+1-0.5n^{-1})}{\Gamma(v+1)}\times\left[\frac{\Gamma(v+1-0.5n^{-1})\Gamma(1-0.5n^{-1})}{\Gamma(v+1)}\right] \tag{5.35}$$

通过数值方法解此方程可以获得形状参数 v 的估计值，之后可以得到尺度参数的估计值为

$$\alpha=\frac{m_a\Gamma(v+1)}{2\Gamma(v+1.5)\Gamma(1.5)} \tag{5.36}$$

图 5.1～图 5.4 分别给出了不同参数时的各种分布模型。从图 5.1 中可以看出随着参数 α 的增大，瑞利分布的曲线峰值变小，峰值向随机变量 x 增大的方向移动，并且曲线形状逐渐“展宽”。从图 5.2 中可以看出当参数 m 固定时，随着参数 α 的增大，对数正态分布的峰值变小，并且峰值向 x 减小的方向移动。从图 5.3 中可以看出当参数 q 固定时，随着参数 p 的增大，曲线的形状在明显地变化着，当 $p<1$ 时，韦布尔分布随着 x 的增大，概率密度函数明显地减小，而当 $p>1$ 时，概率密度函数值则随着 x 的增大先增大后减小。从图 5.4 中可以看出当参数 α 固定时，随着参数 v 的增大，K 分布的峰值减小，并且峰值向 x 增大的方向移动。

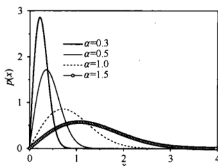


图 5.1 不同参数时瑞利分布的 PDF

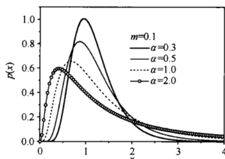


图 5.2 不同参数时对数正态分布的 PDF

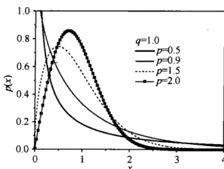


图 5.3 不同参数时韦布尔分布的 PDF

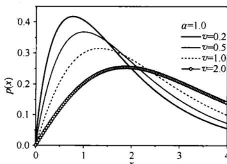


图 5.4 不同参数时 K 分布的 PDF

根据上面介绍的各种分布模型的参数估计方法,从中可以得到一种与实验数据相吻合的最佳分布模型,可以利用它们的“似然率”来进行选择,即

$$R_{\mathrm{IL}}=\frac{\prod_{i=1}^{N}\mathrm{PDF}_{\mathrm{I}}(x_i;\theta_{\mathrm{I}})}{\prod_{i=1}^{N}\mathrm{PDF}_{\mathrm{L}}(x_i;\theta_{\mathrm{L}})} \tag{5.37}$$

其中,R_{IL}中 I=R,W,K 分别表示瑞利分布、韦布尔分布和 K 分布相对于对数正态分布的似然率,θ_{I} 是各种具体分布模型中的参数。当 R_{RL},R_{WL},R_{KL}均小于 1 时,最佳分布模型为对数正态分布;否则,取似然率最大的那种分布模型为最佳分布模型。

5.1.3　一维动态粗糙海面的杂波模拟及统计分析

以上几种模型大部分源于实验数据的经验统计,但在实际环境中由于海洋环境变化的多样性和复杂性及其他因素的影响,得到的实验数据往往具有一定的局限性和不完整性,而利用当今迅速发展的计算机仿真技术,可以有效地解决这些困难。本书中介绍的 Kirchhoff 近似不需要数值求解粗糙海面的表面电流,因此,运算速度较快,但缺点是不能计算大入射角时的电磁散射,即使加上遮蔽函数也具有一定的局限性,而快速多极子方法计算速度快且计算结果精确,因此,当入射角小于 70°时,可以采用 Kirchhoff 近似方法计算粗糙海面的后向散射,当入射角大于 70°时,采用快速多极子方法进行计算。

以下数值结果中,雷达的工作频率为 9.3GHz(X 波段),粗糙海面的长度为 $L=819.2\lambda=26.4\mathrm{m}$,采样点数为 $N=8192$,即每个波长采样 10 个点。为了得到满足 PM 谱分布的实际动态粗糙海面的杂波时间序列,时间间隔取为 0.01s[9],总的观测时间为 5.12s,即每隔 0.01s 模拟一次 PM 海面并计算其散射回波,得到一组含 512 个随机变量的时间序列。杂波的幅值是散射场的模值,散射截面是对 100 组随机样本进行集平均而获得的。雷达与被照射海面的距离设为 10km,海面风速分别为$U_{19.5}=1.5\mathrm{m/s}$ 和$U_{19.5}=7.5\mathrm{m/s}$,对应蒲福级数中的 1 级和 4 级海态(表 1.2)。图 5.5 和图 5.6 分别给出了不同风速下的杂波时间序列。

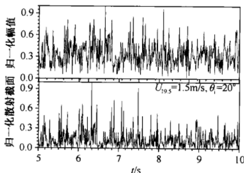


图 5.5　$U_{19.5}=1.5\mathrm{m/s}$ 时的杂波时间序列

利用前面介绍的杂波模型及参数估计方法,分别将计算得到的后向散射场幅值和散射截面的时间序列进行参数提取,并利用式(5.37)得到不同入射

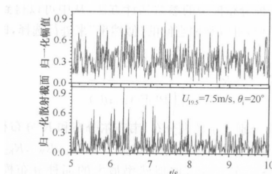


图 5.6 $U_{19.5}=7.5$m/s 时的杂波时间序列

角、不同极化状态和不同风速下的最佳杂波分布模型，如表 5.1 所示。从表中可以看出在掠入射或海面粗糙度较大的情况下，即表的右下角部分，杂波幅值的最佳分布模型为 K 分布；在近垂直入射时，即表的第二列，杂波的幅值和归一化散射截面(normalized radar cross section, NRCS)均服从对数正态分布。同时从表 5.1 中还可以看出杂波的幅值或散射截面的分布都与海面的风速有关。当 $U_{19.5}=1.5$m/s 时，海面比较平静，除了近垂直入射时服从对数正态分布外，其余的均服从韦布尔分布；当海面比较粗糙时，即 $U_{19.5}=7.5$m/s 时，在 $0.5°\leqslant\theta_i\leqslant45°$ 的范围内，其杂波分布均为对数正态分布，而在大、中入射角范围(表中 $\theta_i=64°$或 $\theta_i=78°$)，杂波的幅值分布为韦布尔分布。

表 5.1 各种条件下的杂波幅值(A)和 NRCS(P)的最佳分布

$\theta_i/(°)$	0.5	24	45	64	78	86.5
$[A_{VV}]_{U_{19.5}=1.5m/s}$	LN	WB	WB	WB	WB	WB
$[A_{HH}]_{U_{19.5}=1.5m/s}$	LN	WB	WB	WB	WB	WB
$[P_{VV}]_{U_{19.5}=1.5m/s}$	LN	WB	WB	WB	WB	WB
$[P_{HH}]_{U_{19.5}=1.5m/s}$	LN	WB	WB	WB	WB	WB
$[A_{VV}]_{U_{19.5}=7.5m/s}$	LN	LN	LN	WB	WB	KD

图 5.7(a)和(b)分别给出了两种风速下($U_{19.5}=1.5$m/s 和 $U_{19.5}=7.5$m/s)杂波的幅值和散射截面分布的直方图及其最佳拟合曲线，其中，图 5.7(a)表示的是较大风速下杂波的幅值分布，图 5.7(b)则为较小风速下杂波的散射截面分布，粗实线代表的是最佳拟合曲线。

众所周知，海杂波的产生机理非常复杂，不仅与雷达工作的背景状况(如风速、风向)有关，还与雷达本身的工作状态(如照射条件、发射频率、极化、分辨率)有关，采用同样的方法研究了 L 波段(1.5GHz)和 S 波段(3.0GHz)，在不同风速、不同

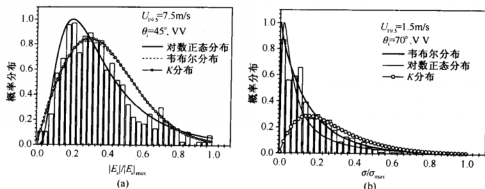


图 5.7　不同风速下杂波的幅值分布和散射截面分布直方图及最佳拟合曲线

极化状态下的杂波时间序列信号和它们的幅值概率分布及其最佳分布模型。如图 5.8～图 5.11 所示，其中，图 5.8 和图 5.9 表示的是不同工作环境和条件下的杂波时间序列信号，图 5.10 和图 5.11 为相应的杂波幅值分布及其最佳模型拟合曲线。

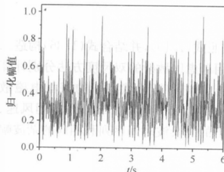


图 5.8　杂波时间序列

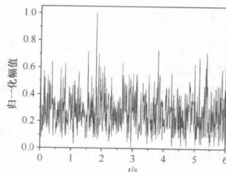


图 5.9　杂波时间序列

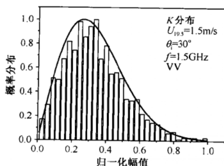


图 5.10　杂波幅值分布

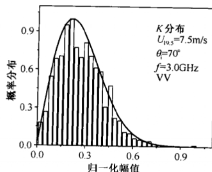


图 5.11　杂波幅值分布

为了便于观察和比较，表 5.2 给出了不同入射条件下杂波的幅值分布随入射条件的变化情况。从表中可以看出在其他条件不变的情况下，杂波幅值在两种波段下的分布存在明显的差异。

表 5.2　各种条件下不同波段的杂波幅值(A)的最佳分布

波段	$\theta_i/(°)$	30	45	60	70
L 波段 (1.5GHz)	$[A_{HH}]_{U_{19.5}=1.5\text{m/s}}$	KD	RL	KD	WB
	$[A_{VV}]_{U_{19.5}=1.5\text{m/s}}$	KD	WB	KD	KD
	$[A_{HH}]_{U_{19.5}=7.5\text{m/s}}$	RL	WB	WB	KD
	$[A_{VV}]_{U_{19.5}=7.5\text{m/s}}$	RL	WB	WB	WB
S 波段 (3.0GHz)	$[A_{HH}]_{U_{19.5}=1.5\text{m/s}}$	WB	WB	WB	KD
	$[A_{VV}]_{U_{19.5}=1.5\text{m/s}}$	WB	LN	WB	KD
	$[A_{HH}]_{U_{19.5}=7.5\text{m/s}}$	LN	WB	WB	KD
	$[A_{VV}]_{U_{19.5}=7.5\text{m/s}}$	LN	KD	WB	KD

5.1.4　二维动态海面杂波特性分析

为了获得低空警戒雷达的海杂波特性，按照式(1.19)，并结合式(1.36)构造二维时变动态海面，对每一时刻模拟的海面，采用考虑体散射的双尺度方法分别计算 Ku 波段(15GHz)电磁波在不同入射角、风速、风向和极化状态下的海面电磁散射，从而得到多组海杂波时间序列。图 5.12～图 5.15 给出了 Ku 波段不同风速、不同入射角、不同极化状态、侧风和逆风入射下的海杂波时间序列和相应的杂波幅值分布及其最佳模型拟合曲线。

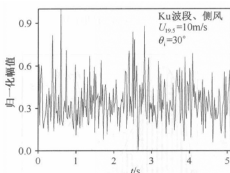


图 5.12　杂波时间序列

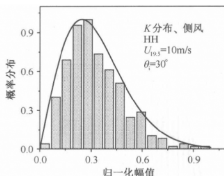


图 5.13　杂波幅值分布

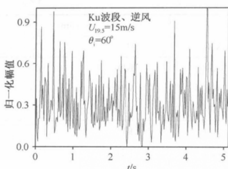


图 5.14　杂波时间序列

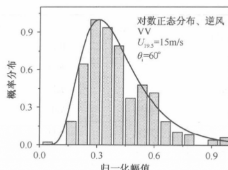


图 5.15　杂波幅值分布

平面波入射方向与风向夹角分别为 0°,90°和 180°时,即顺风、侧风和逆风三种情况,杂波的最佳分布模型如表 5.3 所示。从表 5.3 中可以看出当入射角在 30°～70°范围内,Ku 波段二维海面杂波分布一般为非瑞利分布,除少数情况下为对数正态分布外,多数为 K 分布和韦布尔分布。同时,Ku 波段二维海面杂波分布与入射角大小有较大关系,当入射角小于 45°或大于 60°时,杂波分布受风向的影响较小,尤其在入射角为 30°时,三种风向下的杂波分布模型几乎完全一样,当入射角为 70°时,杂波分布均符合 K 分布,而入射角在 45°和 60°之间时,杂波分布受风向的影响较大。当入射角为 60°时,三种风向的杂波包含三种类型的分布。另外,比较顺风和逆风两种情况下的杂波分布还可以发现两者的差异随风速的增大而增大。例如,在 $U_{19.5}=10\text{m/s}$ 时,除了在 45°入射、HH 极化和 60°入射、VV 极化两种环境下杂波分布不同外,其余情况均具有相同的分布,而当风速增大到 15m/s 时,海面的各向异性特性更加明显,除了在入射角为 30°和 70°情况下其分布相同外,其余的分布均不相同。

表 5.3　不同情况下 Ku 波段杂波幅值的最佳分布

入射角	风速 / 风向	$U_{19.5}=10\text{m/s}$		$U_{19.5}=15\text{m/s}$	
		HH	VV	HH	VV
30°	顺风	KD	KD	WB	WB
	逆风	KD	KD	WB	WB
	侧风	KD	KD	WB	WB
45°	顺风	KD	WB	LN	WB
	逆风	WB	WB	KD	KD
	侧风	WB	WB	WB	WB

续表

入射角	风速 / 风向	$U_{19.5}=10\text{m/s}$		$U_{19.5}=15\text{m/s}$	
		HH	VV	HH	VV
60°	顺风	KD	KD	KD	LN
	逆风	KD	WB	WB	KD
	侧风	WB	WB	KD	LN
70°	顺风	KD	KD	KD	KD
	逆风	KD	KD	KD	KD
	侧风	KD	KD	KD	KD

5.2 动态海面散射杂波的多普勒谱特性

本节采用了适用范围较大的小斜率近似方法研究了二维线性海面模型散射回波的各阶多普勒谱的频移特性，得到了多普勒谱频移的理论公式，与经典多普勒频移公式相比，考虑了风速、大尺度波浪轨道运动等因素对多普勒谱频移的影响。同时，根据粗糙面的双尺度模型，基于多普勒谱频移的物理机理，给出了求解散射场多普勒谱展宽的理论公式，最后将理论公式计算所得结果与模拟结果及实测数据进行了比较，讨论了风速、入射波频率及入射角等因素对多普勒频移、展宽的影响。

5.2.1 二维线性海面模型

本节二维海面模型是线性随机模型[10]，在 t 时刻，假设风向和 x 轴重合，考虑到表层水面的漂移速度及斯托克斯轨道运动的影响时，海面的表面轮廓可用下式进行模拟：

$$f(x,y,t)=\sum_{n=0}^{N}A_n\sin[K_{nx}(x+v_{ox}t+v_{fx}t)+K_{ny}(y+v_{oy}t+v_{fy}t)-\omega_n t+\Phi_n] \tag{5.38}$$

其中，由海面引力波引起的大尺度波浪斯托克斯轨道运动速度[11]和风驱表层水面的漂流速度分别为

$$v_o=\sqrt{v_{ox}^2+v_{oy}^2}=\omega_p K_p\left(\frac{H_p}{2}\right)^2\frac{\cosh(2K_p d)}{2\sinh^2(K_p d)}-\omega_p\left(\frac{H_p}{2}\right)^2\frac{\coth(K_p d)}{2d} \tag{5.39}$$

$$v_f=0.03U_{19.5} \tag{5.40}$$

$K_p\approx 0.877^2 g_c/U_{19.5}^2$ 为基波的空间波数，$\omega_p=2\pi/T_p\approx 0.877g_c/U_{19.5}$，$H_p\approx 0.0212U_{19.5}^2$为基波的浪高，$T_p$ 为基波周期，d 为海水深度，g_c 为重力加速度，$K_{nx}=$

$K_n\cos\beta_n$，$K_{ny}=K_n\sin\beta_n$，Φ_n 为$[-\pi,\pi]$内均匀分布的随机相位，β_n 为波浪运动方向与风向 $\bar{\beta}_0$ 之间的夹角，一般而言，β_n 为时间的函数，但在模拟过程中，时间比较短，所以可以简单地认为 β_n 不是时间的函数，并且满足 $E[\beta_n]=\bar{\beta}_0$，同时 β_n 的一阶概率密度满足

$$P_n(\beta_n)=g_n\left|\cos\left(\frac{\beta_n}{2}\right)\right|^{2e_n}\mathrm{rect}\left(\frac{\beta_n}{2\pi}\right) \tag{5.41}$$

其中，rect(x)满足当 $x<0.5$ 时为 1，其余情况为 0。

$$g_n=\frac{2^{2e_n-1}\Gamma^2(1+e_n)}{\pi\Gamma(1+2e_n)},\quad e_n=\left(\frac{n_{\mathrm{T}}+1}{n+1}\right)^{1/2} \tag{5.42}$$

其中，$n_{\mathrm{T}}=\mathrm{int}\left[\frac{K_{\mathrm{T}}}{\Delta K}\right]$，$K_{\mathrm{T}}=1/K_m$，$K_m=\sqrt{\rho g_c/\eta}=363\mathrm{rad/m}$，$\rho$ 和 η 分别为海水密度和表面张力，$\omega_n=\{g_cK_n[1+(K_n/K_m)^2]\}^{1/2}$。式(5.38)中的系数 A_n 可由下式确定：

$$\frac{1}{2}A_n^2(K_n,\beta_n)=W(K_n,\beta_n)\Delta K \tag{5.43}$$

其中，$W(K_n,\beta_n)$为二维海面的 PM 谱，即[9]

$$W(K_n,\beta_n)=\frac{\alpha}{2|K_n|^4}\exp\left(-\frac{\beta g_c^2}{K_n^2U_{19.5}^4}\right)\cos^4\left(\frac{\beta_n}{2}\right) \tag{5.44}$$

其中，参数 $\alpha=8.10\times10^{-3}$，$\beta=0.74$。

图 5.16 给出了应用式(5.38)模拟的不同风速及风向角下二维线性海面模型的表面轮廓，由图 5.16 可以看出当海面上方风速越大时，二维海面的起伏越大，同时二维海面呈现出各向异性的特征。

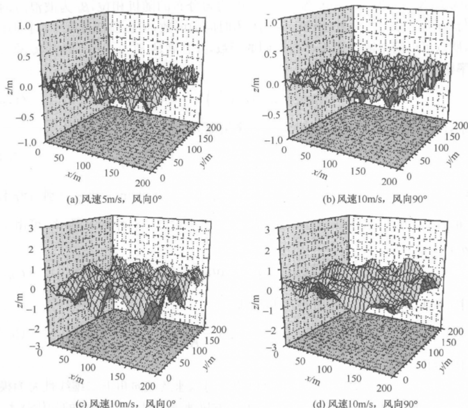
5.2.2　海面回波多普勒谱频移

在模拟二维海面线性模型的基础上来研究二维海面散射回波的频移特性，利用一阶小斜率近似方法研究动态海面回波多普勒谱的频移特征，其中，海面散射振幅因子为[12]

$$\begin{aligned}S(\theta_s,\theta_i,t)=F\int\exp\{&-\mathrm{i}p_xx-\mathrm{i}p_yy+\mathrm{i}p_z\sum_{n=0}^{N}A_n\sin[K_{nx}(x+v_{\alpha x}t+v_{fx}t)\\&+K_{ny}(y+v_{oy}t+v_{fy}t)-\omega_nt+\Phi_n]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{5.45}$$

其中，θ_i，θ_s 和 φ_s 分别为入射角、散射角及散射方位角。

$$\begin{cases}F=\dfrac{2(qq_0)^{1/2}B(k_i,k_s)}{(2\pi)^2(q+q_0)}\\p_x=k(\sin\theta_i-\sin\theta_s\cos\varphi_s)\\p_y=k\sin\theta_s\sin\varphi_s\\p_z=k(\cos\theta_i+\cos\theta_s)\end{cases} \tag{5.46}$$



(a) 风速5m/s，风向0°　(b) 风速10m/s，风向90°

(c) 风速10m/s，风向0°　(d) 风速10m/s，风向90°

图 5.16　不同风速及风向角下二维海面表面轮廓图

其中，$B(\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}_s)$为散射振幅系数，$\boldsymbol{k}_i = k\sin\theta_i \hat{\boldsymbol{k}}_i$，$\boldsymbol{k}_s = k\sin\theta_s \hat{\boldsymbol{k}}_s$，$q = k\cos\theta_i$，$q_0 = k\cos\theta_s$。令式(5.45)中的被积函数为

$$\xi(\theta_s, \theta_i, t) = \exp\Big\{ \mathrm{i} p_z \sum_{n=0}^{N} A_n \sin[K_{nx}(x + v_{ox}t + v_{fx}t) + K_{ny}(y + v_{oy}t + v_{fy}t) - \omega_n t + \Phi_n] \Big\} = \sum_{m_0=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_{N-1}=-\infty}^{+\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \Big\{ J_{m_n}[p_z A_n] \Big\} \times \exp\Big\{ \mathrm{i} \sum_{n=0}^{N-1} m_n K_{nx} x + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{N-1} m_n K_{ny} y \Big\} \exp\Big\{ \mathrm{i} \sum_{n=0}^{N-1} m_n \{ K_{nx}(v_{ox} + v_{fx})t + K_{ny}(v_{oy} + v_{fy})t - \omega_n t + \Phi_n \} \Big\} \tag{5.47}$$

在式(5.47)的计算过程中应用到了关系式 $\exp(\mathrm{i}x\sin u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\exp(\mathrm{i}mu)$，其中，$J_m(x)$ 为第一类 m 阶 Bessel 函数。假设雷达照射面积很大，将 $\xi(\theta_s, \theta_i, t)$代入式(5.45)可得

$$S(\theta_s,\theta_i,t)=4\pi^2F\sum_{m_0=-\infty}^{+\infty}\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{m_{N-1}=-\infty}^{+\infty}\prod_{n=0}^{N}\{J_{m_n}[p_zA_n]\}$$
$$\times\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{n=0}^{N-1}m_n[K_{nx}(v_{ox}+v_{fx})t+K_{ny}(v_{oy}+v_{fy})t-\omega_nt+\Phi_n]\right\}$$
$$\times\Lambda\left(\sum_{n=0}^{N}m_nK_{nx}-p_x\right)\Lambda\left(\sum_{n=0}^{N}m_nK_{ny}-p_y\right)\tag{5.48}$$

利用式(5.48)求出的结果，则 $S(\theta_i,\theta_s,t)$ 相对时间而言的自相关函数为

$$R_e(\theta_i,\theta_s,\tau)=\langle S(\theta_i,\theta_s,t)\cdot S(\theta_i,\theta_s,t+\tau)^*\rangle$$
$$=16\pi^4F^2\sum_{m_0=-\infty}^{+\infty}\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{m_{N-1}=-\infty}^{+\infty}\prod_{n=0}^{N}\{J_{m_n}[p_zA_n]\}^2$$
$$\times\exp\left\{-\mathrm{i}\sum_{n=0}^{N}m_n[K_{nx}(v_{ox}+v_{fx})\tau+K_{ny}(v_{oy}+v_{fy})\tau-\omega_n\tau]\right\}$$
$$\times\Lambda\left[\sum_{n=0}^{N}m_nK_{nx}-p_x\right]^2\Lambda\left[\sum_{n=0}^{N}m_nK_{ny}y-p_y\right]^2\tag{5.49}$$

则散射矩阵因子的谱函数，即式(5.49)的 Fourier 变换可以表示为

$$W_e(\theta_i,\theta_s,\omega)=\int R_e(\theta_i,\theta_s,\tau)\exp(-\mathrm{i}\omega\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=8\pi^3F^2\sum_{m_0=-\infty}^{+\infty}\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{m_{N-1}=-\infty}^{+\infty}\prod_{n=0}^{N}\{J_{m_n}[p_zA_n]\}^2\Lambda\left(\sum_{n=0}^{N}m_nK_{nx}-p_x\right)^2$$
$$\times\Lambda\left(\sum_{n=0}^{N}m_nK_{ny}-p_y\right)^2\Lambda\left\{\omega+\sum_{n=0}^{N}m_n[K_{nx}(v_{ox}+v_{fx})\right.$$
$$\left.+K_{ny}(v_{oy}+v_{fy})-\omega_n]\right\}\tag{5.50}$$

忽略高阶散射场的作用，将式(5.50)中的 Bessel 函数用级数展开后经过推导可得

$$W_e(\theta_i,\theta_s,\omega)=8\pi^3F^2\left\{(1-p_z^2\delta^2)\Lambda(p_x+0)^2\Lambda(p_y+0)^2\Lambda(\omega+0)\right.$$
$$+\frac{p_z^2}{4}\sum_{n=0}^{N}A_n^2\Lambda(p_x+K_{nx})^2\Lambda(p_y+K_{ny})^2\Lambda[\omega+K_{nx}(v_{ox}+v_{fx})$$
$$+K_{ny}(v_{oy}+v_{fy})-\omega_n]+\frac{p_z^2}{4}\sum_{n=0}^{N}A_n^2\Lambda(p_x-K_{nx})^2\Lambda(p_y-K_{ny})^2$$
$$\left.\times\Lambda[\omega-K_{nx}(v_{ox}+v_{fx})-K_{ny}(v_{oy}+v_{fy})+\omega_n]\right\}\tag{5.51}$$

其中，δ^2 是海面表面轮廓高度的起伏方差。对镜向散射场而言，$p_x=0,p_y=0$，所以在式(5.51)中只有当 $K_{nx}=K_{ny}=0$，即 $n=0$ 时，脉冲函数才不为零。但是又因为当 $n=0$ 时，$A_n=0$，因此有

$$W_e(\theta_i,\theta_s,\omega)=8\pi^3F^2(1-p_z^2\delta^2)\tag{5.52}$$

且峰值所对应的中心频率为

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=0 \tag{5.53}$$

对非镜向散射场而言，$p_x\neq 0$，$p_y\neq 0$，根据式(5.51)可知只有当 $K_{nx}=\pm p_x$，$K_{ny}=\pm p_y$ 时，$W_e(\theta_i,\theta_s,\omega)$才不为零。又因为表层水面的漂流速度 v_f 及斯托克斯轨道运动速度 v_o 都是沿风向的，即文中的$\hat{x}$方向，因此有 $v_{oy}=v_{fy}=0$，这时峰值所对应的中心频率为

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\pm\frac{K_{nx}(v_{ox}+v_{fx})-\omega_n}{2\pi}$$
$$=\pm\frac{1}{2\pi}\left\{p_x(v_{ox}+v_{fx})-\left[g_c(p_x^2+p_y^2)^{1/2}\left(1+\frac{p_x^2+p_y^2}{K_m^2}\right)\right]^{1/2}\right\} \tag{5.54}$$

当忽略 v_o 和 v_f 的影响时，式(5.54)可写为

$$f=\mp\frac{1}{2\pi}\left\{\left[g_c(p_x^2+p_y^2)^{1/2}\left(1+\frac{p_x^2+p_y^2}{K_m^2}\right)\right]^{1/2}\right\} \tag{5.55}$$

式(5.55)给出的结果正是经典的 Bragg 频移公式[13]。从该公式可以明显地看出中心频率及多普勒频移与风速无关。

在式(5.50)中，若不忽略高阶散射场作用，当$\begin{cases}m_j=\pm 2\\ m_n=0,\quad n\neq j\end{cases}$时可得非相干散射场的二阶多普勒峰值中心频率，通过比较可知非相干散射场二阶峰易被其他峰所湮没而不易被观测到。

5.2.3 海面回波多普勒谱展宽

在讨论了多普勒谱的峰值及其中心频移问题的基础上，以下着重分析多普勒谱的展宽特性。需要说明的是本节中的展宽是指多普勒谱的峰值不再明显减小时两侧的总宽度。由式(5.51)所得的多普勒谱的各阶峰值都对应一个单频点而没有展宽，然而通过模拟及实际测量所得到的多普勒谱峰值均是有一定谱宽的，下面将对其展宽的物理机理进行分析，并给出计算谱宽的理论公式。

海面波浪和观测雷达之间的水平相对运动导致了多普勒频移，而多普勒峰的展宽主要是由于海面表面轮廓 $f(x,y,t)$上的各点随时间上下振动造成的。由于入射波同空间波数大小为$\sqrt{p_x^2+p_y^2}/i$ 的波浪进行谐振从而导致了第 i 阶多普勒峰的出现。另外，由于海浪的基波波浪在海面形成中起到了主导作用，因此，根据粗糙面表面轮廓的双尺度模型，可假定这些波长较小的谐振波浪随着基波波浪的上下振动而上下运动。正是由于这些谐振面元随基波上下不同步的运动，从而导致了有些面元散射场的多普勒峰中心频率向左偏，而有些向右偏，并且各面元散射

场的多普勒峰中心频率的偏离值也不尽相同，因此，观测及计算模拟得到的多普勒峰都不绝对是一个脉冲函数，而有一定谱宽。假设有一小谐振面元 $f'(x,y,t)$ 随基波上下运动的速度为 U_z，由于 U_z 的存在从而导致的多普勒峰值的中心偏移频率为

$$f_r = \frac{p_z U_z}{2\pi} \tag{5.56}$$

由式(5.56)可见 U_z 越大 f_r 也越大。考虑到表层水面的漂移速度及斯托克斯轨道运动的影响，假设式(5.38)中仅考虑基波波浪，即

$$f_0(x,y,t) = H_p \sin[K_p(x + v_{\alpha x}t + v_{fx}t) + K_p(y + v_{\alpha y}t + v_{fy}t) - \omega_p t + \Phi_p] \tag{5.57}$$

显然，对应于 $f(x,y,t)=0$ 的点上下振动的速度最快，U_z 的最大值出现在 $f(x,y,t)$ 为零的位置处。基波波浪的相速度为[14]

$$U_p = \frac{g_c}{\omega_p} = \sqrt{\frac{g_c}{K_p}} \tag{5.58}$$

同样考虑表层水面的漂流速度 v_f 及斯托克斯轨道运动速度 v_o 都是沿 x 方向，相对于雷达观测而言，基波波浪表面轮廓 $f(x,y,t)$ 将依速度 $U_p + v_{\alpha x} + v_{fx}$ 向前平移(顺风)或向后平移 $U_p - v_{\alpha x} - v_{fx}$ (逆风)。由于在 $f(x,y,t)$ 为零的位置处，波浪斜率为 $H_p K_p$，所以可以求得

$$U_{z\max} = H_p K_p [U_p \pm (v_{\alpha x} + v_{fx})] = H_p \omega_p \pm H_p K_p (v_{\alpha x} + v_{fx}) \tag{5.59}$$

其中，"±"分别对于顺、逆风情况。根据式(5.56)可得 f_r 的最大值为

$$f_{r\max} = \frac{p_z U_{z\max}}{2\pi} = \frac{p_z H_p}{T_p} \pm \frac{p_z H_p K_p (v_{\alpha x} + v_{fx})}{2\pi} \tag{5.60}$$

因此，根据式(5.60)可得出多普勒谱峰的展宽为

$$\Delta f_{r\max} = 2\left| \frac{p_z H_p}{T_p} \pm \frac{p_z H_p K_p (v_{\alpha x} + v_{fx})}{2\pi} \right| \tag{5.61}$$

式(5.61)中当去掉 $v_{\alpha x}$ 和 v_{fx} 的影响时，$\Delta f_{r\max} = 2|p_z H_p / T_p|$，这与文献[13]中不考虑表层水面的漂流速度的结果是一致的。

5.2.4　数值计算结果与讨论

由于在实际的观测及模拟过程中容易观测到散射场的一阶多普勒峰，因此，这里主要针对散射回波的一阶多普勒峰的中心频移及展宽特性进行分析。

图 5.17 中分别根据式(5.54)和式(5.55)计算得到了入射角为 80°时平静海面(浪高小于 0.2m)后向散射场的多普勒谱频移(虚线)同测量数据(点线)的比较[15~17]。通过图 5.17 可以看出在入射波长较小时，测量结果与采用不考虑表层水面的漂流速度 v_f 及斯托克斯轨道运动速度 v_o 的经典频移公式(5.55)进行计算时，在入射波长较小时，测量结果与计算结果有一定差别，而采用式(5.54)的计算值与多次

测量平均结果吻合更好。随入射波长的增加，多普勒谱峰值的中心频移减小，这主要是多普勒谱峰值的中心频移同入射波波长的均方根$\sqrt{\lambda}$成反比所造成的。

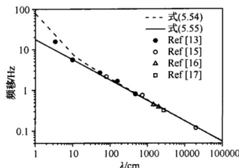


图 5.17 多普勒谱频移随入射波波长的变化

图 5.18 给出了不同风速时采用式(5.54)计算的后向散射场多普勒频移随入射波长的变化，其中，入射角为 65°。从图中可以看出计算结果(曲线)和测量值(图中标记点)[13]吻合得较好，另外还可以看出随着风速的增大，对于相同入射波长，多普勒频移也明显增大，因此，式(5.54)中由于风驱而导致的表面水层的流动及大尺度波浪的轨道运动等参量对多普勒频移的影响很大，一般不可忽略。为便于比对分析，图 5.18 中同样给出了利用式(5.55)计算的未考虑 v_f 和 v_o 影响时，多普勒频移随入射波长的变化，显然该频移结果与风速无关，当然也与测量数据有较大差别。

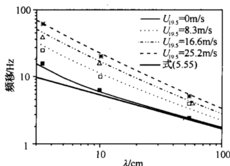


图 5.18 风速对多普勒谱频移的影响

图 5.19 给出了不同入射角下海面后向散射场的一阶多普勒频移随风速的变化，以及与 Rozenberg 等通过浪池实验获得的测量数据[18]之间的比较，其中，图 5.19(a)中测量结果为 HH 极化下的结果(入射频率为 13.7GHz)，图 5.19(b)为 VV 极化下的结果(入射频率为 13.94GHz)。显然测量结果总体而言分布在式(5.54)计算结果的两侧，而采用未考虑 v_f 和 v_o 影响时的式(5.55)计算的多普勒

频移与风速无关，与测量数据则有较大差别。通过图5.19(a)和(b)还可以看出随着风速的增大，多普勒频移同时增大。这主要是因为风速增大时，表面水层的运动速度及大尺度波浪的轨道运动速度都有所增大。

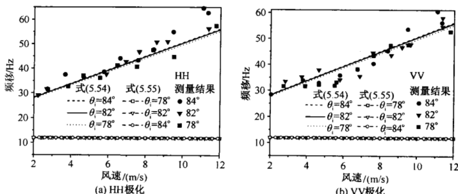


图5.19 海面后向散射场一阶多普勒频移随风速的变化

图5.20(a)和(b)根据式(5.61)分别给出了顺风和逆风观测时，不同入射角下后向散射场一阶多普勒峰的展宽随风速的变化，其中，入射频率为13.94GHz，点画线是浪池实验中的测量结果[18]。从图5.20可看出，随着风速的增大后向散射场的一阶多普勒谱的谱展宽越大，这主要是因为随着风速的增大，大尺度波浪的轨道速度、表面水层的运动速度都在增大，从而导致大尺度波浪表面上的小尺度面元的上下运动速度增大。另外还可以看出对于相同的风速，无论是顺风还是逆风观测，测量结果基本上分布在入射角为84°和78°时应用式(5.61)计算的结果之间，因此，式(5.61)可用于估计一阶多普勒峰的谱宽。

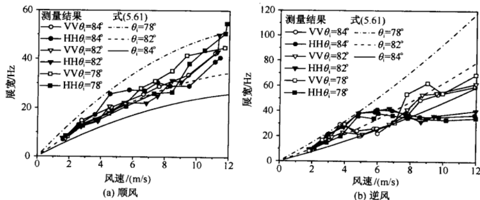


图5.20 海面后向散射场一阶多普勒峰展宽随风速的变化

为了进一步说明入射角及入射频率等参量对后向散射场的一阶多普勒谱频移及展宽的影响，图 5.21(a)～(f)中给出了应用文献[9]中的式(17)所模拟的 1GHz 频率入射下的后向散射场多普勒谱(图中风速为 5m/s，HH 极化)，同时在图 5.22 和图 5.23 中还将模拟的有关频移及谱宽结果同本章所给理论公式计算结果进行了比较。从图 5.21 中可以看出随着入射角的增大，数值模拟的多普勒谱谱宽先增大后减小，而多普勒谱峰值的频移是逐渐增大的。另外通过计算还可以发现对于相同的入射角，随着入射波频率的增大，多普勒谱的谱宽及频移都是增大的。

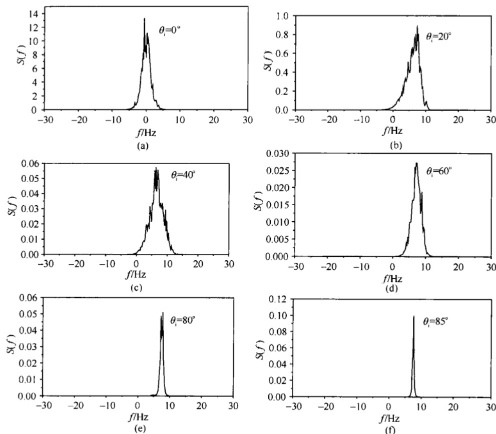


图 5.21　入射波频率为 1GHz 时不同入射角下后向散射场的多普勒谱

图 5.22 给出了不同入射频率下多普勒谱中心频移(模拟结果)随入射角的变化，同时与应用式(5.54)和式(5.55)的计算结果进行了比较。从图 5.22 可以看出无论入射频率是 1GHz 还是 2GHz，在大入射角区域，采用式(5.54)计算出的频移与模拟结果吻合较好；当入射角度较小时，模拟结果大于理论计算结果，文献[9]中也得到了类似结果，但产生这种差异的原因仍需进一步研究。图中同时采用经典

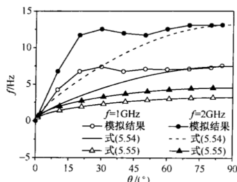


图 5.22　多普勒谱中心频移的模拟结果和本书结果的比较

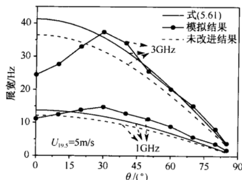


图 5.23　一阶谱宽同入射角的关系

的 Bragg 频移公式(5.55)(忽略 v_{f} 和 v_{o} 的影响)计算出了多普勒频移结果,不难发现与模拟结果相比有较大的误差。

图 5.23 给出了风速为 5m/s 时不同频率下后向散射场一阶多普勒峰的谱宽随入射角的变化,图 5.24 则给出了入射角为 60°,不同风速时后向散射场一阶多普勒峰的谱宽与入射波频率的关系,其中,图 5.23 和图 5.24 中点画线是根据文献[9]中的式(17)模拟得到的结果,图中同时给出了未考虑 v_{or} 和 v_{fr} 影响时(图中未改进结果)的展宽结果的比较。通过图 5.23 可看出模拟得到的谱宽结果随入射角的增大先增大后减小,而计算结果则随入射角的增大单调减小。当入射角度较小时,模拟结果小于计算结果,而在中等或较大入射角度处,模拟结果略大于计算结果。从图中还可以看出采用式(5.61)的计算结果相对于未改进结果而言,与模拟结果吻合更好。根据电磁散射的驻相理论,粗糙面上和入射波矢垂直的面元对后向散射场的大小起决定性作用,因此,当入射角度较小时,只有大尺度波浪的波峰或波谷中的面元对后向散射场的大小起主要作用,而这些面元在上下方向上的运

动速度很小，所以模拟所得到的谱宽较小。又因为式(5.61)是假设小尺度谐振波浪面元随大尺度基波运动的条件下推导给出的结果，而没有考虑到大尺度波浪在小入射角度时对后向散射场的影响，因此，式(5.61)不适用于入射角度较小的情况。通过图5.24还可以看到随着入射频率的增大一阶多普勒峰的谱宽在单调增大，对于相同的入射频率，一阶多普勒峰的谱宽随着风速的增大而增大。同样从图中仍不难看出采用式(5.61)的计算结果相对于未改进结果而言与模拟结果有更好的吻合。

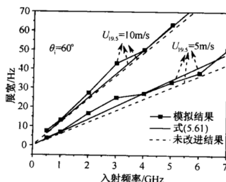


图5.24　一阶谱宽随入射波频率的变化

5.3　动态海面散射杂波的混沌特性

长期以来，存在着两种描述客观世界的理论体系，即确定论和概率论。确定论是一种"一一对应"的因果关系，而概率论是"一多对应"关系。确定论认为，只要系统的外力不发生突然变化，系统就不会自发地发生突变；概率论则认为系统受太多已知和未知因素的影响，而最终只能是以一定的概率实现某种结果。然而自20世纪70年代以来，来自气象、天文、生物、物理、化学和数学等领域的大量研究表明某些确定性的非线性系统由其内部非线性的作用也可产生类似随机的现象——混沌。混沌的发现，在确定论和概率论之间架起了一座由此及彼的桥梁。混沌概念的提出还使得能够把许多复杂的现象看成是有目的、有结构的行为，而不再是某种外来的、偶然的行为。

敏感依赖于初始条件是混沌的最主要特征[19]，经典学说认为由确定性系统所描述的运动紧密地依赖于初始条件。但混沌现象的出现表明初值的信息经过若干次迭代后已经消耗殆尽，结果已经与初值没有什么关系了。这就是混沌敏感依赖于初始条件的性质，并且这种性质绝不是由计算误差形成的，而是非线性系统的固有性质。混沌敏感依赖于初始条件的性质必然导致系统的长期行为是很难预测的，甚至是不可预测的结论。粗略地讲，混沌是由确定性非线性系统产生的对初始

值敏感的复杂过程，通过它一个简单的确定性系统可以解释自然界中许多极不规则的复杂现象。

自 1963 年 Lorenz 首次描述了混沌系统的概念后，混沌理论被广泛应用到各个领域。人们已经逐渐认识到混沌是一种普遍的物理现象，一些通常被认为是随机的信号，如雷达杂波信号等皆具有混沌特性。对于时间序列来说，要从数学上严格证明它是混沌的几乎不可能，只能从混沌系统所具有的特征或满足的必要条件入手，如果时间序列满足必要条件，表明它可能具有混沌特性。这些必要条件如下[19]：

(1) 该过程是有界的。

(2) 该过程的关联维数应是分数，并且随着嵌入维的增加，它应趋于一常数。

(3) 动力系统对初始值敏感，即至少有一个正的 Lyapunov 指数。

5.3.1 一维动态粗糙海面后向散射杂波的混沌分析

1. 相空间重构法

相空间重构法[20, 21]是混沌分析的基础，下面将简单介绍相空间重构法的基本理论。相空间重构法是用一个变量在不同时刻的值构成相空间，动力系统的一个变量的变化与其自身和系统中的其他变量的相互作用有关，即此变量随时间的变化隐含着整个系统的动力学规律，因此，重构的相空间的轨线也反映了系统状态的演化规律。

用单一时间序列$\{x(t)\}$的数据通过适当的组合方式重新建立一个 m 维的相空间R^m，得到一个相形分布

$$
\begin{array}{lllll}
\boldsymbol{Y}(t_1): & x(t_1) & x(t_1+\tau) & \cdots & x(t_1+(m-1)\tau) \\
\boldsymbol{Y}(t_2): & x(t_2) & x(t_2+\tau) & \cdots & x(t_2+(m-1)\tau) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{Y}(t_i): & x(t_i) & x(t_i+\tau) & \cdots & x(t_i+(m-1)\tau) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{Y}(t_n-(m-1)\tau): & x(t_n-(m-1)\tau) & x(t_n-(m-2)\tau) & \cdots & x(t_n)
\end{array}
\tag{5.62}
$$

其中，$t_2=t_{1+1}=t_1+\tau, t_3=t_{2+1}=t_2+\tau=t_1+2\tau, t_{n-(m-1)}=t_n-(m-1)\tau$，每一列构成 m 维相空间中的一个相点，任一相点 $\boldsymbol{Y}(t_i)$ 有 m 个分量 $(x(t_i), x(t_i+\tau), \cdots, x(t_i+(m-1)\tau))$，上面的$(n-(m-1))$个相点在 m 维相空间中构成一个相型，这些相邻的相点之间的连线描述了系统在 m 维相空间中的演化轨线。

相空间重构的关键在于维数 m 和时间延迟 τ 的选取，在下面的内容中介绍空

间维数以及时间延迟的选取准则。

1）空间维数 m 的选择

假设存在 A,B 两个物体，它们的维数分别为 D_A,D_B，即它们都在 D 维空间中，定义一个“交叠维数(codimension)”用来表示 $A\cap B$ 的维数。这种交叠维数具有加法性质，即

$$D_{A\cap B} = D_A + D_B - D \tag{5.63}$$

例如，将两条曲线置于一个平面上，通常会出现一些交叠(一般情况是一些点)，这时 $D_A=D_B=1$,$D=2$，根据式(5.63)可得 $D_{A\cap B}=0$，即相交的是一些点，而在三维空间中，它们一般不相交，这是因为 $D=3$,$D_{A\cap B}=-1$，因此，可以知道式(5.63)与实际情况是符合的。在相空间重构时，为了使时间序列不会相交，通常令式(5.63)左端为-1，因此，嵌入空间的维数为

$$D = 2D_A + 1 \tag{5.64}$$

在混沌运动特征的计算中，所需的嵌入空间最小维数取决于从时间序列中提取什么样的物理量，如相图中，$D>2D_A$，而在计算 Lyapunov 指数、分维数时，只是记及沿轨道的平均性质，取 $D_A<D<2D_A$ 就可以了。但 m 值的选取应通过反复试算来确定。Roux 等建议让 m 值逐次加 1，直到相图上没有附加的结构出现为止。

2）时间延迟 τ 的选取

为了由时间序列构造出相空间，除了确定维数外，还必须给出适当的时间延迟。从理论上讲，时间延迟的选取是任意的，但在实际系统中，时间延迟的选取也应通过反复实验来实现。如果时间延迟过小，则相空间趋于一直线；反之，如果时间延迟过大，会使数据点集中在相空间的一个小区域内，不能从重构的相空间图中得到吸引子的局部结构。虽然有各种时间延迟选取的优化方案，但本书中主要介绍的是采用自相关函数来确定时延的方法。时间序列 $x(t)$ 的归一化自相关函数定义为

$$C(\tau) = \frac{\sum_{n=1}^{N}[x(n+\tau)-\bar{x}][x(n)-\bar{x}]}{\sum_{n=1}^{N}[x(n)-\bar{x}]^2} \tag{5.65}$$

其中，N 为时间序列信号的长度，$\bar{x}$ 为分析时间段内样本的均值。对于给定的时间序列，通过式(5.65)计算出归一化自相关函数后，取自相关函数首次到达零值时的时延作为构造相空间的时延(即为在第 τ 个时间点时自相关函数首次为零)。图 5.25 中给出了满足 PM 谱分布的一维动态介质海面，在频率 $f=3\text{GHz}$ 的电磁波照射下的后向散射杂波时间序列的归一化自相关函数随时间延迟的变化情况，其中，介质海面的相对介电常数为 $\varepsilon_r=(48.0,35.0)$。从图中可以看出当风速 $U_{19.5}=5\ \text{m/s}$，入射角$\theta_i=30°$时，$\tau=5$；当风速 $U_{19.5}=10\text{m/s}$，入射角 $\theta_i=60°$时，$\tau=7$。

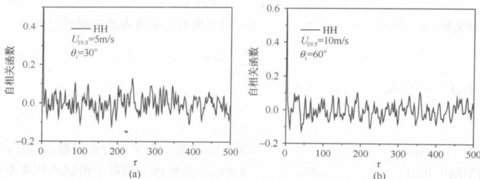


图 5.25　归一化自相关函数随时间延迟的变化

图 5.26 给出了一维海面后向散射杂波时序信号的三维相空间示意图，其计算条件分别对应图 5.25(a)和(b)。图中，x 轴表示相空间重构中的 $x(t_n)$，y 轴表示 $x(t_n+\tau)$，z 轴表示 $x(t_n+2\tau)$。

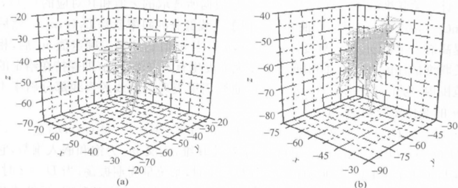


图 5.26　一维海面后向散射杂波时序信号的三维相空间示意图

2. 关联维数

关联维数是描述海杂波混沌特性的一个重要参量，设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$ 为一长度为 N 的实际测量或模拟得到的时间序列，将其嵌入到 m 维相空间中，它的轨迹用矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 表示，即

$$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-m+1}]^{\mathrm{T}} \tag{5.66}$$

其中，每一个矩阵元素代表 i 时刻系统的状态，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{Y}(t_i)&=[x(t_i),x(t_i+\tau),\cdots,x(t_i+(m-1)\tau)]\\&=[x_i,x_{i+\tau},\cdots,x_{i+(m-1)\tau}]\end{aligned} \tag{5.67}$$

m 维相空间中的任意一对相点之间的距离可以表示为

$$r_{ij} = |\mathbf{Y}(t_i) - \mathbf{Y}(t_j)| \tag{5.68}$$

若给定距离 r,则两点间距离大于 r 的相点对在所有点中所占的比例可记为

$$C_2(r,m) = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} H(r - |x_k - x_j|) \tag{5.69}$$

其中,$H(\cdot)$代表 Heaviside 函数,即

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{5.70}$$

其中,N 为相点数,$N=n-m+1$。显然,$C_2(r,m)$是一个累积分布函数,它描写了相空间中吸引子上两点之间距离小于 r 的概率,并刻画了相对于相空间某参考点在 r 内的相点聚集的程度。定义 $C_2(r,m)$为吸引子的关联函数,若 r 选得太小,以至于任意点间距离$|x_k-x_j|$都比 r 大,则 $H(x)=0$,求和后,$C_2(r,m)=0$ 表示相点分布在 r 范围之外;若 r 选得太大,一切"点对"的距离都不会超过它,则 $C_2(r,m)=1$,所以太大的 r 反映不了系统的内部性质。一般地,r 的取值满足 $0\leqslant C_2(r,m)\leqslant 1$ 时,计算才有意义。

计算关联维的估计值 $D_2(m)$,一般是根据所选取的 r 值和其对应的 $C_2(r,m)$作 $\ln C_2(r,m)-\ln r$ 曲线,则曲线中近似于直线部分的斜率就是 $D_2(r,m)$。然后逐渐提高嵌入维数 m,依次重复计算 $D_2(r,m)$,当 m 值达到某一确定值 m_c 后,相应的关联维估计值 $D_2(m)$不再随 m 的增大而发生有意义的变化(即保持在给定的误差范围内)为止,这在 $\ln C_2(r,m)-\ln r$ 曲线图里表现为曲线的直线部分斜率不再随 m 的变化而变化,此时

$$D_2(m_c) = D_2(m_c+1) = D_2(m_c+2) = \cdots = D_2(r,m) \tag{5.71}$$

记 $D_2(m_c)=D_2$,D_2 就是待求的吸引子的关联维,定义 m_c 为饱和嵌入维数,它的存在与否决定了时间序列的性质。当 $D_2=1$ 时,系统呈周期振荡;当 $D_2=2$ 时,系统具有两种不可约频率的准周期振荡;当 $D_2>2$ 或不是一个整数时,系统表现出一种对初始条件敏感的混沌振荡。如果 m_c 不存在,那么关联维的估计值 $D_2(m)$将随着 m 的增加趋于无穷大,这表示吸引子不存在,即被讨论的时间序列是一个随机系统。所以,对于白噪声来说,$D_2(m)$是 m 的线性函数,而对于混沌系统来说,$D_2(m)$可以达到饱和。

针对一维海面散射,图 5.27 给出不同风速、不同入射角下 $\ln C_2(r,m)-\ln r$ 曲线图,其中,入射电磁波频率 $f=3\text{GHz}$。从图中可以看出 $\ln C_2(r,m)$随着 $\ln r$ 的增大而增大,最后趋于 0。随着 m 的增大,曲线的斜率变大,直至最后基本不变,此时的斜率就是关联维数。

图 5.28 给出了关联维数随嵌入维数的变化关系。从图中可以看出,关联维数的数值均大于 0 且并不是一个整数,也就是说,海杂波的时间序列是混沌的。图 5.29 给出了 $U_{19.5}=5\text{m/s}$ 时后向散射杂波的关联维数随入射角的变化情况(HH

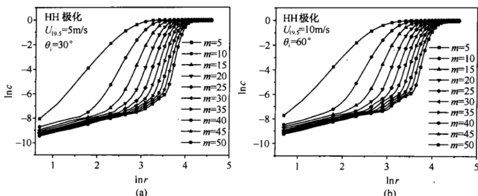


图 5.27　不同风速和入射角下海杂波的相对积分图

极化)。可以看出海杂波的最大关联维数具有随着入射角的增大而减小的趋势,最后趋于稳定(5.5～6.5),同时随着入射角的增大,入射角对关联维数的影响变小。

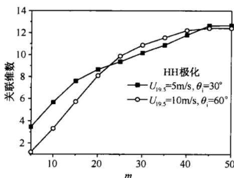


图 5.28　关联维数随嵌入维数的变化

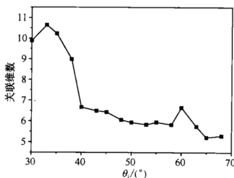


图 5.29　不同入射角下海杂波的关联维数

3. Lyapunov 指数

混沌系统由相空间中的不规则轨道奇怪吸引子来描述,奇怪吸引子的一个明显特征就是吸引子邻近点的指数离析,邻近点的指数离析意味着对初始状态完全确定的系统来说,在长时间情况下也不可避免地发生变化,这种行为就是系统初始条件敏感依赖性的反映。Lyapunov 指数是相空间中相近轨道的平均收敛或平均发散性的一种度量,可定量地表示奇怪吸引子的平均收敛性或平均发散性。考察一个具有 n 个变量的系统,在相空间中任选一个点,并取一个中心在该点的 n 维的小球。随着时间的推移,小球将演变成一个椭球,其 n 个主轴发散或收敛的平均速度就构成了 Lyapunov 指数谱。对于混沌系统来说,必须有一个正的 Lyapunov 指数,即存在一个发散的主轴,沿着这个方向具有局部不稳定性。在存在吸引子的情况下,

动力系统是耗散的，也就是说，系统在某个方向可能是不稳定的，但全局是稳定的，因此，总体上来说，收敛的速度要大于发散的速度，也就是要求 Lyapunov 指数谱的总和小于零。对于实测的或模拟的离散时间序列，由于不知道其满足的动力学方程，因此，一般都是求 Lyapunov 指数，只要它大于零，就可以证明系统是混沌的。

计算 Lyapunov 指数的方法有很多，这里将主要介绍长度演化法，即 Wolf 方法。1985 年，Wolf 等在总结前人研究成果的基础上，提出了一种能从实验数据计算 Lyapunov 指数的方法——长度演化法，具体的计算步骤如下：

(1) 应用时间序列重构 m 维相空间。

(2) 选取使各相空间坐标相关最小的 τ。

(3) 如图 5.30 所示，在延拓的 m 维相空间，取初始相点 $A(t_1)$ 为参考点，$\boldsymbol{Y}(t_1)$ 的 m 个分量为 $x(t_1), x(t_1+\tau), \cdots, x(t_1+(m-1)\tau)$，根据下式：

$$L_{nbt} = \min_{i \neq j}\left[\| \boldsymbol{X}(t_i) - \boldsymbol{X}(t_j) \| \right] \tag{5.72}$$

可求得 $A(t_1)$ 的最近邻点 $B(t_1)$，其中，min 为最小函数。L_{nbt} 表示在欧氏几何意义上 $A(t_1)$ 与其最近邻点 $B(t_1)$ 的距离，设为 $L(t_1)$。又设当时间 $t_2 = t_1 + k\Delta t$ 时，$A(t_1)$ 演化到 $A(t_2)$，同时 $B(t_1)$ 演化到 $B(t_2)$，其间距 $A(t_2)B(t_2) = l(t_2)$。如果用 λ_1 表示在此时间内线段指数增长率，则 $l(t_2) = L(t_1)2^{\lambda_1 k\Delta t}$，即

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_2 - t_1}\mathrm{lb}\frac{l(t_2)}{L(t_1)} = \frac{1}{k}\mathrm{lb}\frac{l(t_2)}{L(t_1)} \tag{5.73}$$

其中，$\Delta t = 1$(单位时间间隔)。

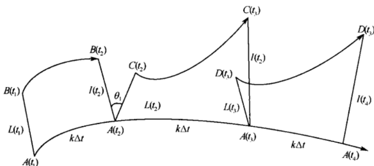


图 5.30 长度演化法计算 Lyapunov 指数

(4) 在 $A(t_2)$ 的若干近邻点中找出一个满足 θ_1 角很小的近邻点 $C(t_2)$(若无法满足小 θ_1 和近邻两条件，仍采用 $B(t_1)$)。当时间 $t_3 = t_2 + k\Delta t$ 时，$A(t_2)$ 发展到 $A(t_3)$，而 $C(t_2)$ 发展到 $C(t_3)$ 且 $C(t_3)A(t_3) = l(t_3)$，则

$$\lambda_2 = \frac{1}{k}\mathrm{lb}\frac{l(t_3)}{L(t_2)} \tag{5.74}$$

将上述过程一直进行到点集$\{x(t_i), i=1,2,\cdots,n\}$终点，而后取指数增长率$\lambda_N$的平均值为 Lyapunov 指数估计值，即

$$LE_1(m)=\frac{1}{N}\sum_{i}^{N}\frac{1}{k}\mathrm{lb}\frac{l(t_i)}{L(t_i-1)} \tag{5.75}$$

其中，N不是相点数，而是发展的总步数，即$N=\frac{n}{k}$为步长。

(5) 依次增加嵌入空间维数m，重复步骤(3)，(4)，直到指数的估计值$LE_1(m_0)$保持平稳为止，记为

$$LE_1(m_0)=LE_1(m_0+1)=LE_2(m_0+2)=\cdots=LE_1 \tag{5.76}$$

图 5.31 给出了 HH 极化入射时不同风速、不同入射角下的 Lyapunov 指数随时间的变化情况，其中，入射电磁波频率$f=3\text{GHz}$。从图中可以看出随着时间的变化，Lyapunov 指数逐渐趋于一个大于零的稳定值，并且这个稳定值就是待考察杂波时间序列的 Lyapunov 指数。表 5.4 列出了不同条件下计算出的 Lyapunov 指数。从表中可以看出它们均为正值，这表明了杂波的初始依赖性，从而说明海杂波是具有混沌特性的。

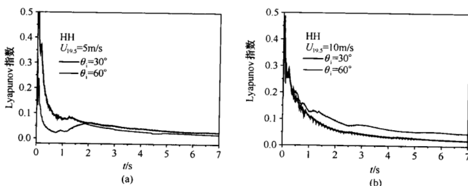


图 5.31　不同风速和不同入射角下 Lyapunov 指数随时间的变化

表 5.4　不同风速和入射角下计算出的 Lyapunov 指数比较

计算条件	$U_{19.5}=5\text{m/s}$ $\theta_i=30°$	$U_{19.5}=5\text{m/s}$ $\theta_i=60°$	$U_{19.5}=10\text{m/s}$ $\theta_i=30°$	$U_{19.5}=10\text{m/s}$ $\theta_i=60°$
Lyapunov 指数	0.0361	0.0239	0.0277	0.0551

5.3.2　二维动态海面后向散射杂波的混沌分析

下面讨论入射波频率$f=3\text{GHz}$，入射角$\theta_i=30°$，海面风速$U_{19.5}=5\text{m/s}$时，二维动态 Fung 粗糙海面顺风时的后向电磁散射的混沌特性。在获得二维

动态海面后向散射杂波的时间序列之后进行相空间的重构，并运用 Grassberger 和 Procaccia 提出的 G-P 算法[21]，计算出 HH 极化下的时间序列关联函数的积分对数图如图 5.32 所示，从而获得关联维随嵌入维的变化图，如图 5.33 所示。从图中可以看出关联维随嵌入维的增大而增大，并且在嵌入维达到 50 以后，关联维收敛到一个稳定的值。此处关联维为 14～16，这与相关文献[22]是基本吻合的。

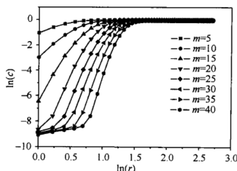


图 5.32　HH 极化时关联函数的积分对数图

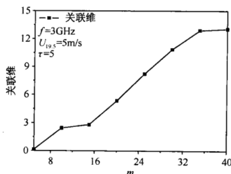


图 5.33　关联维随嵌入维 m 的变化图

图 5.34 给出了采用 Wolf 方法计算的 HH 极化下不同风速和工作频率时，Lyapunov 指数随时间的变化情况。从图中可以看出随着时间的推移，Lyapunov 指数均收敛于一个正值，因此，可以得出杂波时间序列是混沌的。同时还可以看出风速较小时，Lyapunov 指数收敛要比风速较大时的快。随着风速的增大，镜向方向上的散射分量减小，其他方向上的散射分量增大，后向散射杂波时间序列较为缓慢地收敛到相空间的有限区域即吸引子上。

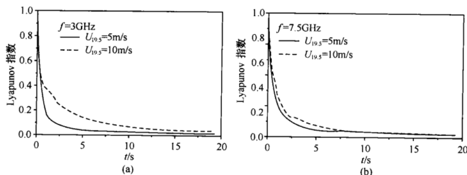


图 5.34　不同风速和工作频率下 Lyapunov 指数随时间的变化

5.4　分形在动态海面散射杂波研究中的应用

雷达探测目标的电磁散射过程是一个复杂的动力学过程，这个过程体现了自然界复杂的电磁相互作用的规律，其中，分形现象近年来已引起了人们的重视。研究表明可以用分形理论研究雷达工作的复杂过程，为雷达目标复杂散射机理研究提供新的理论方法，同时为有效的雷达目标检测与识别提供新的技术实现途径。第 1 章简单介绍了分形理论在粗糙面模拟中的应用，这里，将分形理论应用到动态海面散射杂波的研究中。由于电磁波与具有分形特征的粗糙表面相互作用后的散射回波依然具有分形特征，而一般的确定性目标并不具有分形特征，其散射回波也不具有分形特征，由此，当目标处于复杂粗糙背景时，粗糙背景与目标复合电磁散射回波的分维数会因目标的存在而发生变化，可以利用此规律对粗糙背景中的目标进行检测与识别。

5.4.1　豪斯多夫测度和豪斯多夫维数[23]

在欧氏几何空间中，点对应的维数为零，线、面和球对应的维数分别为一级、二级和三级，还可以引入更高维的空间，但都限于整数维，而分形中的维数一般都是分数，分形维数表征分形集的不规则程度，反映了分形物体的形体特征，因此，可以从测度学的角度将维数从整数维扩展到分数维。为了能定量地描述维数，豪斯多夫(Hausdorf)从测度学的角度对维数进行了定义，并创立了豪斯多夫测度和豪斯多夫维数理论。

1. *豪斯多夫测度*

如果 U 为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 上的非空子集，并且 U 的直径定义为 $|U|=\sup\{|x-y|;x,y\in U\}$，设 F 是所考虑的图形且也是 $\mathbf{R}^n$ 的子集，$\{U_i\}$ 为有限个直径不超过 δ 的集构成的覆盖 F 的集类，即

$$F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i \tag{5.77}$$

且对于每一个 i 都有 $0<|U_i|\leqslant\delta$，则称 $\{U_i\}$ 为 F 的一个 δ 覆盖。设 D 为一非负数，对任何 $\delta>0$，存在着许多直径不超过 δ 的对于 F 的覆盖。定义

$$H_\delta^D(F)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^D\right\} \tag{5.78}$$

可知式(5.78)当 $\delta\to0$ 时趋向于一极限，记为

$$H^D(F)=\lim H_\delta^D(F) \tag{5.79}$$

对 $\mathbf{R}^n$ 中的任意子集 F，这个极限都存在，但极限值通常是 0 或∞。$H^D(F)$称为 F 的

D 维测度。对于空集 Φ 则有 $H^D(\Phi)=0$，如果 E 包含于 F 内，则 $H^D(E)=H^D(F)$，若 F_i 为任意的可数不可交的集合序列，则

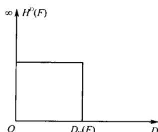


图 5.35　$H^D(F)$关于 D 的变化图

$$H^D\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}H^D(F_i)\qquad(5.80)$$

豪斯多夫测度推广了长度、面积和体积等类似的概念。当比例放大 λ 倍时，曲线的长度放大了 λ 倍，平面的面积放大了 λ^2 倍，这时 D 维豪斯多夫测度则放大 λ^D 倍，这个比例性质是分形理论的基础。图 5.35 所示的曲线是 $H^D(F)$关于 D 的变化图。可见存在一个临界点，使得 $H^D(F)$从∞跃变到 0，这个临界点称为集合 F 的豪斯多夫维数，记为 $D_H(F)$。

2. 豪斯多夫维数

通常将"用尺度 δ 进行度量"这一思想用来对豪斯多夫维数进行描述，即忽略尺寸小于 δ 时的不规则性，并且察看当 $\delta\rightarrow 0$ 时这些测量值的变化。对任何一个有确定维数的几何体来说，如果用与它相同维数的"尺"去度量，都可得到一确定的数值 N，若用低于它的维数的"尺"去量，结果为无穷大；若用高于它的维数的"尺"去量，结果为零。其数学表达式为

$$N(r)\propto r^{-D_H}\qquad(5.81)$$

对式(5.81)取对数可得

$$D_H\propto\frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)}\qquad(5.82)$$

豪斯多夫维数的优点是对任何集均有定义，并且在理论上的意义大于实际的应用。为了工程应用上的方便，又产生出了许多用于估值计算的定义，如信息维、容量维、关联维等。

5.4.2　维数的几种计算方法

尽管从豪斯多夫测度和维数的理论可以直接计算自相似性分形的维数，但对其他复杂的分形进行这种直接的计算则是非常困难的。在实际应用中，已建立了一些近似而有效的计算分形维数的方法。

1. 盒子法

取边长为 δ 的小盒子，将待计算图形覆盖，然后计数与图形相交的盒子数目即非空盒子的数目 $N(\delta)$，因此，当图形为曲线时，其长度 $l(\delta)$为

$$l(\delta)=N(\delta)\quad 或\quad N(\delta)\propto\delta^{-1},\quad D=1\qquad(5.83)$$

当图形为曲面时，它的面积 $S(\delta)$ 为

$$S(\delta) = N(\delta) \propto \delta^{-2}, \quad D = 2 \tag{5.84}$$

若将结果推广到分形曲线 F 的计算中（图 5.36），定义非空盒子的数目为 $N(\delta, F)$，则可以得到 $N(\delta, F)$ 会随着盒子尺寸 δ 的减少而增大，即

$$N(\delta, F) \propto \delta^{-D_B} \tag{5.85}$$

其中，D_B 为盒维数，表示分形曲线 F 的分维数。

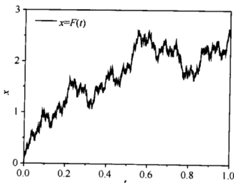


图 5.36 盒子法估计分维数

利用豪斯多夫测度和维数的理论分析可知在利用盒子法计算分维数时，实际上是利用了形状和大小完全相同的 δ^D 的集合作 δ 覆盖，并且与非空盒子数 $N(\delta, F)$ 满足下式：

$$N(\delta, F)\delta^D = \inf\left\{ \sum_i \delta_i^D \right\}, \quad \{\delta_i\}\text{为}F\text{的有限覆盖} \tag{5.86}$$

当 $\delta \to 0$ 时可得到

$$N(\delta, F)\delta^D = \begin{cases} \infty, & D < D_B(F) \\ \text{有限值}, & D = D_B(F) \\ 0, & D > D_B(F) \end{cases} \tag{5.87}$$

显然，只有 $N(\delta, F)$ 满足

$$N(\delta, F) \propto \delta^{-D_B(F)} \tag{5.88}$$

时才成立，从而得到盒维数的严格定义为

$$D_B(F) = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta, F)}{\ln \delta} \tag{5.89}$$

其中，非空盒子数目 $N(\delta, F)$ 具有以下多种等价形式：

（1）覆盖分形曲线 F 的半径最大为 δ 的闭球的最小个数；

（2）覆盖分形曲线 F 的边长为 δ 的立方体的最小个数；

（3）覆盖分形曲线 F 的紧致凸集 B 的相似集 δB 的最小个数；

（4）覆盖分形曲线 F 的直径至多为 δ 的集合的最小个数。

下面详细介绍如何采用第二种等价形式估计时间序列的盒维数，在图 5.36 中给出盒子包围分形曲线的示意图。在数值模拟时，由于分形集合只能用离散点表示，因此，盒子的尺寸 δ 不能无限减小，必须充分考虑采样点的采样周期。盒维数的具体估计过程如下：

第 1 步　选择一个长度为 N 的时间序列，为了计算方便，将时间轴和幅值轴

都归一化。

第 2 步　选择盒子尺度 $\delta_m(m=1,2,\cdots,M)$，并使其缓慢地接近于零，即比值 $\ln\delta_{m-1}/\ln\delta_m$ 趋近于 1。理论上由于分形尺度的不变性，分形维数与随机序列的时间分辨率（采样率）是相互独立的，δ_m 可以选得无限小，然而实际的随机序列信号是离散信号，当盒子尺寸 δ_m 小于 $1/N$ 时，$\delta_m N$ 就会小于一个采样周期，因此，在实际计算中，最小的 $\delta_m N$ 是有约束的，一般 $\delta_m N$ 选择为采样周期的整数倍。

第 3 步　用长、宽均为 δ_m 的小盒子覆盖正方形，在每个 δ_m 尺度下计算覆盖整个序列的盒子总数 $N(\delta_m,F)$。

第 4 步　画出 $\ln[N(\delta_m,F)]$ 与 $\ln(\delta_m)(m=1,2,\cdots,M)$ 的关系曲线，曲线在 δ_m 的某一取值区间内，服从线性关系，其斜率的相反数即为盒维数 D_B 的估计值，曲线的斜率可以用最小二乘法求得。

2. Minkowski 圆盘覆盖法

设 $E(\delta)$ 是一组点的集合且满足

$$E(\delta)=\{x \mid x\in B_\delta(t),t\in E\} \tag{5.90}$$

其中，$B_\delta(t)$ 是以 t 为圆心，δ 为半径的圆盘，$E(\delta)$ 是覆盖分形曲线的一组点集。设 Minkowski 圆盘覆盖区为 $|E(\delta)|_2$，这时 Minkowski 维为

$$D_{MB}=\lim_{\delta\to 0}\left[2-\frac{\ln|E(\delta)|_2}{\ln\delta}\right]=\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln[|E(\delta)|_2/\delta^2]}{\ln(1/\delta)} \tag{5.91}$$

在数学理论上，Minkowski 维和盒子维是一致的，它们有别于豪斯多夫维 D，但可近似地认为是 D[24]。无论是盒子覆盖还是圆盘覆盖，两者本质是相同的，但是在计算机上使用上述覆盖时，总是用曲线上有限的离散点完成，而且是将无穷层次结构的分形曲线改为有限层次结构上进行。通过对 Weierstrass 分形曲线的计算，发现其结果收敛速度十分缓慢，与相应的理论值有较大的偏差。

3. 变换法

对已知维数的分形曲线，运用变换法比盒子法计算得到的结果要准确。设置宽为 R 的矩形（盒子）覆盖到分形曲线 F 上，矩形的高度由分形曲线在框内的最高点和最低点决定，一步一步移动矩形遍历所有像素点，将所有的矩形的高和宽相乘并且加起来得到总面积 $S(R)$，一步步地改变矩形宽度 R 的大小后重复以上操作，得到一系列 $S(R)$。需要注意的是上述操作过程中，矩形经过的范围应远远大于矩形的宽度。将 $S(R)$ 除以 R^2 得到

$$N(R)=\frac{S(R)}{R^2} \tag{5.92}$$

在线性范围内存在 $N(R)\sim R^{-D}$ 的关系，作 $\ln[N(R)]\sim\ln(1/R)$ 曲线，取其中

线性部分的斜率为分维数 D。这里的 $N(R)$ 实际上就是覆盖一部分分形曲线所需的面积为 R^2 的盒子数，不过它一般不是整数，也可以直接作 $\ln[S(R)]\sim\ln(1/R)$ 曲线，其中，线性部分的斜率为 $2-D$，并由此得到分维数 D。

变换法和盒子法在本质上是相同的，它们都是用不断改变尺寸的盒子去覆盖图形。变换法比较准确的原因可能是

(1) 它允许盒子数 $N(R)$ 可以为非整数；

(2) 盒子数 $N(R)$ 是遍及所有像素点得到的数值。

4. *相关函数和功率谱法*

设 $f(t)$ 为连续有界的随机函数，$\langle f\rangle$ 为 f 的平均值，即

$$\langle f\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.93}$$

它的自相关函数为

$$\begin{aligned} R(\tau) = \langle f(t)f(t+\tau)\rangle &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f(t)-\langle f\rangle][f(t+\tau)-\langle f\rangle]\mathrm{d}t \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t - \langle f\rangle^2 \end{aligned} \tag{5.94}$$

又因为

$$\begin{aligned} \int[f(t+\tau)-f(t)]^2\mathrm{d}t &= \int f^2(t+\tau)\mathrm{d}t + \int f^2(t)\mathrm{d}t - 2\int f(t+\tau)f(t)\mathrm{d}t \\ &= 2\langle f^2\rangle - 2\int f(t+\tau)f(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.95}$$

将式(5.95)代入式(5.94)中可以得到

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2 - \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f(t+\tau)-f(t)]^2\mathrm{d}t \\ &= R(0) - \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[f(t+\tau)-f(t)]^2\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.96}$$

其中，$R(0)=\langle f^2\rangle-\langle f\rangle^2$。

当增量函数 $f(t+\tau)-f(t)$ 满足[24, 25]

$$|f(t+\tau)-f(t)| \leqslant c\tau^{4-2D} \tag{5.97}$$

其中，$t\geqslant 0, t+\tau\leqslant 1$，$c$ 为常数，则 $f(t)$ 的自相关函数满足

$$R(0)-R(\tau) \approx c\tau^{4-2D} \tag{5.98}$$

如果 $f(t)$ 是一个独立增量随机函数，其结构函数[25]

$$V(\tau) = \langle[f(t+\tau)-f(t)]^2\rangle = 2[R(0)-R(\tau)] = 2c\tau^{4-2D} \tag{5.99}$$

因此，可以通过求 $f(t)$ 的结构函数 $V(\tau)$ 计算分形曲线的分维，同时对自相关函数 $R(\tau)$ 进行 Fourier 变换也可以获得分形曲线的功率谱 $S(\omega)$

$$S(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right|^{2}=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\tau \tag{5.100}$$

将式(5.98)代入式(5.100)可以得到当 $\omega\to\infty$ 时，功率谱 $S(\omega)\sim c\omega^{2D-5}$。

5. *局部方差累积法*[26]

用线度尺寸为 b 的线元来覆盖随机分形曲线 F，线元在 t 轴上的投影记为 l(图 5.37)，可知线度尺寸 b 取得越小，对分形曲线的长度度量就越精细。但是实际应用中，分形曲线是通过计算机模拟的，因此，在构造分形函数的过程中，无论 b 取得多么小，也无法描述出分形曲线的无穷层次的精细结构，即使对于所取的最小线元 $l_{\min}$，对应的尺寸 b 所覆盖的也不是直线，而是存在着无规则涨落的曲线。

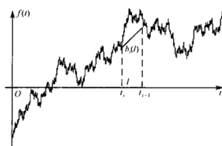


图 5.37 局部方差累积法的分维数估计

若将随机分形函数作为平稳过程，则其平稳过程有无穷方差，但它的增量 $x(t+\tau)-x(t)$ 是平稳的，即它们不依赖于 t 的分布，而且具有结构函数

$$\langle[x(t+\tau)-x(t)]^{2}\rangle\approx c\tau^{2H} \tag{5.101}$$

取随机分形函数某子区间 $l=t_{i+1}-t_i$，对应的增量为 $x_{i+1}-x_i$，均方根为 $\sigma_i(l)\sim l^H$，表示其无规则涨落。对于欧氏空间中的线元 $b_i(l)$ 有 $b_i(l)=\sqrt{l^2+l^{2H}}\sim l^H$，则

$$\sum_{i=1}^{N}b_i(l)\sim\frac{L_H}{l}l^H=L_Hl^{H-1} \tag{5.102}$$

令指数 α 满足

$$\alpha=\frac{\ln\sum_{i=1}^{k}b_i(l)}{\ln l}\approx\frac{\ln\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(l)}{\ln l}=H-1 \tag{5.103}$$

其中，$k=L_H/l$。令 $l=\delta$，则对应的分形曲线的长度公式为

$$L_E=L_H\delta^{1-D} \tag{5.104}$$

正如期望的那样，指数为 α 的随机分形函数有维数 $D=1-\alpha$。

这种方法称为局部方差累积法，为了验证这种分形曲线分维数的计算方法，采用式(1.43)描述的 Weierstrass 分形函数进行检验，同时采用盒子法和变换法对分

维数进行估计，分维数的估计结果如表 5.5 所示。

表 5.5　一维 Weierstrass 分形函数曲线分维数的估计

曲线维数	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
盒子法	1.058	1.108	1.164	1.237	1.329	1.416	1.468	1.56	1.634
变换法	1.036	1.109	1.194	1.279	1.362	1.443	1.52	1.594	1.667
局部方差累积法	1.115	1.199	1.291	1.387	1.483	1.578	1.67	1.761	1.849

从表 5.5 中可以看出盒子法和变换法的结果很接近，而且变换法更好。三种方法中逐步方差累积法效果最好，能够与理论值很好地吻合。

5.4.3　海面回波的分维数

本章前面的内容中分别对海杂波的幅值分布、多普勒频移和展宽以及混沌特性进行了研究，在下面的内容中将着重讨论海杂波的分维特性，并利用盒子法提取杂波序列的分维数，其中，杂波序列的获得均采用第 3 章中的矩量法。图 5.38 中给出了两种风速($U_{19.5}=5\text{m/s}$ 和 $U_{19.5}=8\text{m/s}$)不同极化方式和不同入射角下理想导体海面的杂波序列图形，其中，粗糙海面模型为一维 PM 谱导体海面，入射锥形波的频率为 $f=1.0\text{GHz}$。

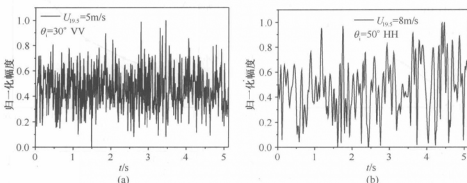


图 5.38　杂波时间序列

图 5.39 给出了一维导体 PM 海面杂波序列的分维数 D_c 随入射角的变化情况，从图中可以明显地看出在相同入射条件下，风速较大时杂波序列的分维数较大。从图中还可以看出随着入射角的增大，杂波序列的分维数呈先增大后减小的趋势。

同样地，研究了粗糙海面模型为一维改进分形模型(式(1.53))时杂波序列的分维特性。图 5.40 给出了不同极化方式、不同入射角下杂波序列分维数 D_c 随一维改进分形海面分维数 D_s 的变化情况，其中，改进分形海面的采样点数为 $N_s=$

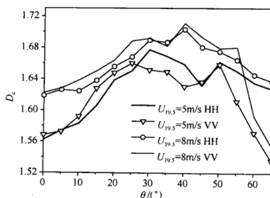


图 5.39　PM 海面杂波序列分维数随入射角的变化

1024，采样间隔为 $\Delta x=0.1\lambda$，入射波波长 $\lambda=0.3\text{m}$，其他的参数为 $M=N=10$，$V=0\text{m/s}$，$\xi=2.9$，$b=1/a=1.85$。从图中可以看出在两种极化下杂波序列的分维数均随着改进分形海面分维数的增大而增大。这一结果可用于粗糙海面上方目标的检测与预警、海洋遥感等方面。

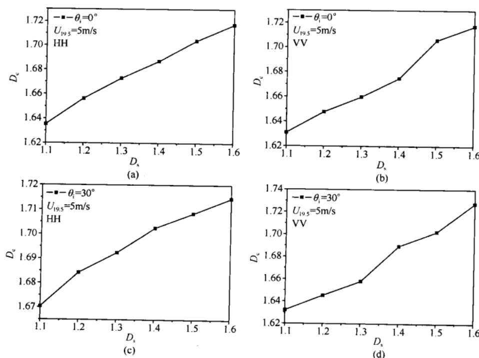


图 5.40　改进分形海面杂波分维数随粗糙面分维数的变化

参 考 文 献

[1] Guinard N W, Ransone J T, Laing M B et al. NRL terrain clutter study, phase I. Naval Research Laboratory, NRL Report 6487. 1967.

[2] Trunk G V, George S F. Detection of targets in non-Gaussian sea clutter. IEEE Trans Aerospace Electronic and System, 1970, 6(5): 620～628.

[3] Fay F A, Clarke J, Peters R S. Weibull distribution applies to sea clutter. IEE Conf Publ (Radar 77), 1977: 101～104.

[4] Ward K D. Compound representation of high resolution sea clutter. Electronics Letter, 1981, 17(16): 561～563.

[5] 盛骤，谢式千，潘承毅．概率论与数理统计．北京:高等教育出版社，1979.

[6] Irina A. Analysis of sea clutter data. ADA348339,1998.

[7] Iskander D R, Zoubir A M. Estimation of the parameters of the K-distribution using higher order and fractional moments. IEEE Trans Aerospace Electronic and System, 1999, 35(4): 1453～1457.

[8] Raghavan R S. A method for estimating parameters of K-Distributed clutter. IEEE Trans Aerospace Electronic and System, 1991, 27(2): 238～246.

[9] Toporkov J V, Brown G S. Numerical simulations of scattering from time-varying randomly rough surfaces. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 2000, 38(4): 1616～1625.

[10] Fung A K. Microwave Scattering and Emission Models and Their Applications. Boston: Artech House, 1994.

[11] Walker D. Experimentally motivated model for low grazing angle radar Doppler spectra of the sea surface. IEE Proc Radar Sonar Navig, 2000, 147(3): 114～120.

[12] Voronovich A G. Wave Scattering from Rough Surfaces. Berlin:Springer-Verlag,1994.

[13] Bass F G, Fuks I M, Kalmykov A I et al. Very high frequency radio wave scattering by a disturbed sea surface. IEEE Trans Antennas Propagat, 1968, 16(5): 554～568.

[14] Bourlier C, Saillard J, Berginc G. Intrinsic infrared radiation of the sea surface. Progress In Electromagnetic Research, 2000,27:185～335.

[15] Sofaer E. Phase-coherent back-scatter of radio waves at the surface of the sea. Proc IEE (London), 1958, 105(2): 383～394.

[16] Ingalls R P, Stone M T. Characteristics of sea clutter at HF. IRE Trans Antennas and Propagation (Abstracts), 1957, AP-5:164.

[17] Thorsos E I, Broschat S L. An investigation of the small slope approximation for scattering from rough surfaces. Part I. Theory J Acoust Soc Amer, 1995, 97(4): 2082～2093.

[18] Rozenberg A D, Quigley D C, Melville W K. Laboratory study of polarized microwave scattering by surface waves at grazing incidence. Part I-wind waves. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 1995, 33(4): 1037～1046.

[19] 林三虎，朱红，赵亦工．海杂波的混沌特性分析．系统工程与电子技术，2004，26(2)：178～180.

[20] Leung H, Lo T. Chaotic radar signal processing over the sea. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1993, 18(3): 287～295.

[21] Grassberger P, Procaccia I. Characterization of strange attractors. Physical Review Letters, 1983, 50

(5)：346～349.

[22] Leung H. Applying Chaos to Radar detection in an ocean environment. IEEE Journal of Oceanic Engineering，1995，20(1)：56～64.

[23] 杜干．目标检测的分形方法及应用. 西安:西安电子科技大学博士学位论文，2000.

[24] Falconer K. Fractal Geometry：Mathematical Foundations and Application. New York：John Wiley，1990.

[25] Berry M V，Lewis Z V. On the Weierstrass-Mandelbrot of arbitrary shape：a fractal approach. Proc Roy Soc London A，1980，370：459～484.

[26] 吴振森，郭立新．一维随机分形曲线的分维估计．计算物理，1992，9(4)：687～692.

第6章　粗糙面与目标的复合电磁散射

第2、3章分别介绍了计算粗糙面电磁散射的近似方法和数值算法。近年来，鉴于目标与实际海面复合电磁散射研究在雷达探测、海洋遥感和目标隐身技术中的重要意义，相关问题的研究已引起了国内外学者的广泛关注。当随机粗糙面上方或下方有低飞目标、漂浮物及潜游目标存在时，电磁散射包含了随机粗糙面与这些特定目标之间复杂的电磁相互作用，这种相互作用在粗糙面及目标上产生了额外的感应电流，从而在雷达检测、目标识别的过程中出现虚警或漏警情况，同时也给目标的制导与跟踪带来很大的困难。因此，开展地、海等粗糙背景及其与目标复合电磁散射特性的研究，通过建模建库和特征提取，建立多干扰环境下目标的复合散射模型，为目标回波特性的数据采集、特征提取、控制和识别、精确制导、仿真，以及隐身与反隐身技术的深入研究提供必要的理论依据和实用模型。最初，对于经典粗糙面与目标复合电磁散射的研究，人们往往将粗糙面和目标的散射进行孤立的研究，对于目标和粗糙面的近场作用，即目标与粗糙面之间的相互耦合作用并未加以考虑，实际上，应当将目标与粗糙背景作为一个整体看待，既要考虑目标与粗糙面各自独立的电磁散射，又要考虑它们之间的相互耦合散射作用，所以目标与粗糙面的复合散射建模一般难以简单地采用解析近似解的方式。

目前，基于积分/微分方程的各种经典数值方法，如矩量法(MOM)、时域有限差分法(FDTD)、时域积分方程法(TDIE)、有限元/边界元方法(FEM/BEM)等仍然是求解粗糙面与目标复合电磁散射的基本方法。同时，国内外学者在这些数值方法的基础上提出了多种改进算法，如在矩量法的基础上发展的快速多极子方法(FMM)、多层快速多极子算法(MLFMA)、最陡下降快速多极子方法(steepest descent FMM, SDFMM)、射线传播快速多极子方法(ray propagation FMM, RPFMM)等和前后向迭代方法(forward backward method, FBM)、广义前后向迭代方法(general FBM, GFBM)、结合谱加速的广义前后向迭代方法(GFBM/spectral acceleration algorithm, SAA)、自适应积分方程方法(AIM)结合矩量法、预修正快速 Fourier 变换(P-FFT)结合矩量法、规范网格法(canonical-grid method, CAG)、带状矩阵迭代规范网格法(banded matrix iterative method, BMIA/CAG)及基于物理意义的双网格法(physics-based two-grid, PBTG/CAG)等。除了以 MOM 为基础的各种改进算法外，同时出现了以有限元方法为基础的多种改进算法，如利用完全匹配层(perfectly matched layer, PML)作为吸收边界的 FEM/PML 方法、结合共形匹配层技术(conformal PML, CPML)的 FEM/CPML 方法、

通过区域分解法(domain decomposition method, DDM)将大范围的计算问题转换为小范围问题的 FEM/DDM 方法以及利用双级准静态(two level quasi-stationary algorithm, TLQSA)结合区域分解的 FEM/DDM/TLQSA 方法。在研究周期性延拓粗糙面宽频带电磁散射问题中,还有采用以 FDTD 方法为基础的谱 FDTD (spectral FDTD, SFDTD)方法等。

虽然利用数值方法得到的复合散射结果可靠性较好,但其受到 PC 机等硬件条件的限制,尤其对于电大尺度粗糙面和电大尺寸目标的电磁散射计算,即使综合采用高效快速的数值方法,需要的计算量和储存量仍然巨大,这迫使人们寻求新的有效的解决方案。近年来出现的数值方法与近似方法的混合方法,既能最大限度地保留数值方法的精确性,又能充分利用近似方法的高效性,在一定程度上克服了数值方法的耗时性及其对计算机硬件的依赖性。常见的混合方法有 Kirchhoff 近似(KA)与矩量法的混合方法、时域有限差分法结合时域物理光学法(FDTD-TD-PO)的混合方法、时域积分方程方法与时域物理光学法(TDIE-TDPO)的混合方法、双向射线追踪法(bidirectional analytic ray tracing, BART)结合高频算法等。另外,随着工作站和微机性能价格比的日益提高,以及高速网络产品的陆续问世,并行计算系统应运而生,如第 3 章中的并行 MOM、并行 FDTD 等均可以被用于计算电大尺度粗糙面与目标的复合电磁散射,同时在一定条件下,还可以考虑并行混合方法等。可以预见,并行算法将是未来计算电磁学的发展趋势之一。

综上,目前用于粗糙背景与目标复合电磁散射的方法主要有数值算法及其与近似方法相结合的混合方法和相关并行技术。然而需要指出的是无论是数值算法还是混合方法,对于不同的散射问题,其适用性并不完全相同,如对于混合方法,其适用性必定受所使用的方法范围的限制,因此,在实际计算中,需要根据具体的复合散射问题进行分析,选择最适合的算法。本章主要介绍较为基础的矩量法、Kirchhoff 近似结合矩量法的混合算法、时域有限差分法、双尺度法及互易性定理结合高频算法的混合算法在粗糙面与目标复合电磁散射问题中的应用。

6.1 矩量法在粗糙面与目标复合电磁散射中的应用

6.1.1 矩量法计算粗糙海面及其上方目标复合电磁散射

1. 积分方程的建立

图 6.1 给出了一维 PM 粗糙海面及其上方二维导体目标的复合电磁散射示意图,其中,S_r 代表粗糙海面轮廓,S_o 代表目标表面轮廓。$\psi_i(\boldsymbol{r})$表示入射场,$\psi_0(\boldsymbol{r})$为海面上方空间总场,海面下方空间总场表示为 $\psi_1(\boldsymbol{r})$,假设粗糙海面的相对介电常数为 ε_1,目标的几何中心点为$(0,H)$,入射角和散射角分别为 θ_i 和 θ_s。

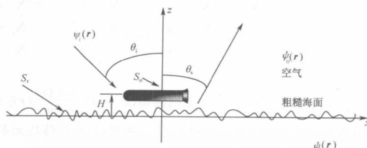


图 6.1　粗糙海面与上方二维目标复合散射示意图

考虑垂直极化电磁波入射的情况，海面及其上方导体目标复合电磁散射的积分方程如下：[1]

$$\frac{1}{2}\psi_0(\boldsymbol{r}) = \psi_i(\boldsymbol{r}) + \int_{S_r}\left[\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}s' + \int_{S_o}\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s', \quad \boldsymbol{r}\in S_r \tag{6.1a}$$

$$\frac{1}{2}\psi_0(\boldsymbol{r}) = \psi_i(\boldsymbol{r}) + \int_{S_r}\left[\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}s' + \int_{S_o}\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s', \quad \boldsymbol{r}\in S_o \tag{6.1b}$$

$$\frac{1}{2}\psi_1(\boldsymbol{r}) = -\int_{S_r}\left[\psi_1(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}s', \quad \boldsymbol{r}\in S_r \tag{6.1c}$$

其中，$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$和 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$分别为上、下半空间的二维空间格林函数。

当 $\boldsymbol{r}\in S_r$ 时，$\psi_0(\boldsymbol{r})$与 $\psi_1(\boldsymbol{r})$满足边界条件[1]

$$\psi_0(\boldsymbol{r}) = \psi_1(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r}\in S_r \tag{6.2a}$$

$$\frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{r})}{\partial n} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi_1(\boldsymbol{r})}{\partial n}, \quad \boldsymbol{r}\in S_r \tag{6.2b}$$

其中，$\rho=\varepsilon_1$。

2. 矩阵方程的建立

假设粗糙海面沿 x 轴方向离散为 N_r 段，目标沿表面离散为 N_o 段，与 3.1 节处理单纯粗糙面的散射问题一样，利用矩量法结合边界条件式(6.2)对式(6.1)中的积分方程进行离散，可以得到下面的矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{\boldsymbol{A}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{B}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{C}}} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{D}}} & -\rho\bar{\bar{\boldsymbol{E}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{0}}} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{F}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{G}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{H}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{V}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{V}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{V}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\psi}}_i \\ \bar{\boldsymbol{0}} \\ \bar{\boldsymbol{\psi}}_i \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}[N_r\times N_r] & [N_r\times N_r] & [N_r\times N_o]\\ [N_r\times N_r] & [N_r\times N_r] & [N_r\times N_o]\\ [N_o\times N_r] & [N_o\times N_r] & [N_o\times N_o]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[N_r\times 1]\\ [N_r\times 1]\\ [N_o\times 1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[N_r\times 1]\\ [N_r\times 1]\\ [N_o\times 1]\end{bmatrix}\tag{6.3}$$

其中，$V_1(x)=\psi_0(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}\in S_r)$为粗糙海面上的磁场，$V_2(x)=\dfrac{\partial\psi_0(\boldsymbol{r})}{\partial n}(\boldsymbol{r}\in S_r)$为粗糙海面上的电场，$V_3(x)=\psi_0(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}\in S_o)$为目标上的磁场，每个矩阵块元素的具体表达式为

$$A_{mn}=\begin{cases}-\gamma_n\Delta x\dfrac{\mathrm{i}k_0}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{R})H_1^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|), & m\neq n\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{f''(x_m)\Delta x}{4\pi\gamma_m^2}, & m=n\end{cases}\tag{6.4a}$$

$$B_{mn}=\begin{cases}\gamma_n\Delta x\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|), & m\neq n\\ \gamma_m\Delta x\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(\dfrac{k_0\Delta x\gamma_m}{2\mathrm{e}}\right), & m=n\end{cases}\tag{6.4b}$$

$$D_{mn}=\begin{cases}\gamma_n\Delta x\dfrac{\mathrm{i}k_1}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{R})H_1^{(1)}(k_1|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|), & m\neq n\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{f''(x_m)\Delta x}{4\pi\gamma_m^2}, & m=n\end{cases}\tag{6.4c}$$

$$E_{mn}=\begin{cases}\gamma_n\Delta x\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_1|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|), & m\neq n\\ \gamma_m\Delta x\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(\dfrac{k_1\Delta x\gamma_m}{2\mathrm{e}}\right), & m=n\end{cases}\tag{6.4d}$$

从式(6.4a)～式(6.4d)可以看出$\bar{\bar{A}},\bar{\bar{B}},\bar{\bar{D}},\bar{\bar{E}}$四个矩阵块仅与粗糙海面的信息有关，而与目标无关，其中，$\boldsymbol{r}_m,\boldsymbol{r}_n$为粗糙面$S_r$上任意两点，$\gamma_n=\sqrt{1+[f'(x_n)]^2}$，$\hat{\boldsymbol{n}}=\dfrac{-f'(x_n)\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{1+[f'(x_n)]^2}}$，$\boldsymbol{R}=\dfrac{\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n}{|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|}$，$\gamma_m=\sqrt{1+[f'(x_m)]^2}$，欧拉常数 e = 2.7182138，$H_0^{(1)}$，$H_1^{(1)}$分别为第一类零阶和一阶汉克尔函数，$f(x)$为粗糙海面的轮廓，$f'(x)$和$f''(x)$分别为粗糙面$S_r$高度起伏函数$f(x)$的一阶及二阶导数，其他矩阵块中的元素为

$$C_{mp}=-\Delta o\frac{\mathrm{i}k_0}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}_o\cdot\boldsymbol{R}_1)H_1^{(1)}\left(k_0|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_{op}|\right)\tag{6.4e}$$

$$F_{qn}=-\gamma_n\Delta x\frac{\mathrm{i}k_0}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{R}_2)H_1^{(1)}\left(k_0|\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_n|\right)\tag{6.4f}$$

$$G_{qn}=\gamma_n\Delta x\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(k_0|\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_n|\right)\tag{6.4g}$$

其中，Δo 是目标表面离散的长度，$\bar{\bar{C}}$，$\bar{\bar{F}}$，$\bar{\bar{G}}$三个矩阵块体现了粗糙海面和目标的耦合作用。$\boldsymbol{r}_{oq}$，$\boldsymbol{r}_{op}\in S_0$，$\hat{\boldsymbol{n}}_o=\dfrac{-Z_o'(x_{op})\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{1+[Z_o'(x_{op})]^2}}$，$\boldsymbol{R}_1=\dfrac{\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_{op}}{|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_{op}|}$，$\boldsymbol{R}_2=\dfrac{\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_n}{|\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_n|}$，$Z_o(x)$表示目标的轮廓，$Z_o'$和 Z_o'' 分别为 Z_o 的一阶和二阶导数。矩阵块$\bar{\bar{H}}$仅由目标决定，其元素可具体表示为

$$H_{qp}=\begin{cases}-\Delta o\dfrac{\mathrm{i}k_0}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}_o\cdot\boldsymbol{R}_3)H_1^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_{op}|), & q\neq p\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{Z_o''(x_{op})\Delta o}{4\pi\gamma_{op}^2}, & q=p\end{cases}\tag{6.4h}$$

其中，$\boldsymbol{R}_3=\dfrac{\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_{op}}{|\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_{op}|}$。

为了避免人为的边缘反射，利用 Thorsos 锥形波（式(3.40)）代替一般的平面波入射，解矩阵方程可以求得 $\bar{V}_1$，$\bar{V}_2$ 和 $\bar{V}_3$，上半空间的远区散射场表达式为

$$\psi_s(\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r}}{\sqrt{r}}\psi_s^N(\theta_s,\theta_i)\tag{6.5}$$

其中，

$$\begin{aligned}\psi_s^N(\theta_s,\theta_i)=&\frac{\mathrm{i}}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\Big\{\int_{S_r}[-\mathrm{i}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{k}_s)V_1(x)-V_2(x)]\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r})\\&\times\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x-\int_{S_o}\mathrm{i}(\hat{\boldsymbol{n}}_o\cdot\boldsymbol{k}_s)V_3(x)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r})\\&\times\sqrt{1+[Z_o'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\Big\}\end{aligned}\tag{6.6}$$

与式(3.53)类似，该复合散射问题的双站散射系数为

$$\sigma(\theta_s)=\frac{|\psi_s^N(\theta_s,\theta_i)|^2}{g\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cos\theta_i\left(1-\dfrac{1+2\tan^2\theta_i}{2k_0^2g^2\cos^2\theta_i}\right)}\tag{6.7}$$

以上我们以垂直极化入射波为例，对于水平极化入射波的情形，读者可自行推导。

3. 数值计算及结果分析

为了研究一维 PM 海面及其上方目标的复合电磁散射特性，首先利用第 3 章中的方法计算了单纯 PM 海面在不同海况（海面风速）下的双站散射系数，如图 6.2 所示，其中，入射波频率为 1GHz，海水的相对介电常数为(72.4, 84.5)，粗糙海面长度为 140λ，锥形波因子 $g=\lambda/4$。可以看出随着风速的增加，海面粗糙度增大，双站散射系数在镜向方向附近幅值减小，在非镜向方向上增加，这主要是由于风速的增加将导致散射系数的非相干分量增加，相干分量减小。下面以海面上方低飞导弹目标为例计算了一维 PM 海面及其上方目标的复合电磁散射特性，假设

入射波频率为 1GHz，导弹的实际尺寸如图 6.3 所示。

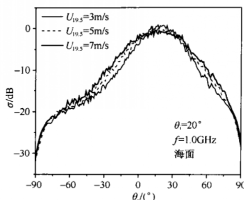


图 6.2　不同风速下海面散射系数的比较

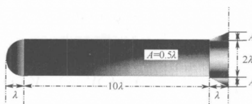


图 6.3　导弹模型的尺寸示意图

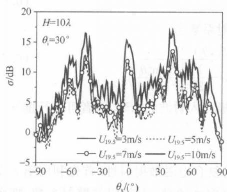


图 6.4　不同海面风速的复合散射系数对比

图 6.4 给出了海面风速对实际粗糙海面与其上方低飞导弹目标的复合电磁散射特性的影响，导弹飞行高度与入射角等计算参数如图中所示。通过与图 6.2 对比，可以很容易看出复合模型的散射系数要大于单纯海面散射系数，而且随着风速的增大，整个观察范围内的复合散射系数均是增加的，这主要由于随着风速的增加，海浪变高，粗糙海面与导弹的耦合散射是增强的。

图 6.5 给出了入射角和风速相同时，导弹的飞行高度对复合模型的散射系数的影响。随着导弹飞行高度的降低，复合模型的散射系数幅值增大，这也是由于在海面风速一定时，随着飞行高度的降低，粗糙海面与导弹的耦合作用增强，使得散射系数在整个观察范围内是增大的。

图 6.6 对比了雷达照射角与导弹尺寸对复合散射特性的影响，其中，大尺寸导弹对应于图 6.3 所示的尺寸，小尺寸对应图 6.3 中导弹尺寸的 1/4。可以看出在其他参数相同的情况下，导弹尺寸越大，复合散射越强，这一方面是由于导弹本身的散射增强，另一方面是其与海面的耦合散射增强所致。另外，随着导弹尺寸的增加，复合散射系数振荡加强。对于入射角而言，当导弹尺寸较小时，入射角的不同导致了复合散射系数在峰值发生偏移，但整体幅值没有太明显的变化。对于尺寸较大的导弹而言，入射角越大，粗糙海面与导弹目标的耦合面积变化越大，复合散射变化也就越明显。

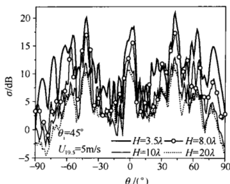


图 6.5　不同导弹飞行高度的复合散射系数对比

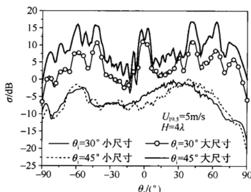


图 6.6　雷达照射角与导弹尺寸对复合散射的影响

6.1.2　矩量法计算粗糙海面与其上方漂浮目标复合电磁散射

1. 积分方程的建立

图 6.7 为一维 PM 粗糙海面及其上方二维导体舰船目标复合电磁散射示意图。同 6.1.1 小节，海面仍为 PM 粗糙海面，海面上方风速为 $U_{19.5}$，海面的相对介电常数为 ε_1。仍考虑入射波为垂直极化锥形波，海面上方空间总磁场为 $\psi_0(\boldsymbol{r})$，海面下方空间总磁场为 $\psi_1(\boldsymbol{r})$。同样根据文献[1]，可以建立如下积分方程：

$$\frac{1}{2}\psi_0(\boldsymbol{r}) = \psi_i(\boldsymbol{r}) + \int_{S_r}\left[\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}s'$$

$$+\int_{S_{oa}}\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s',\quad \boldsymbol{r}\in S_{\mathrm{r}} \tag{6.8a}$$

$$\frac{1}{2}\psi_1(\boldsymbol{r})=-\int_{S_{\mathrm{r}}}\left[\psi_1(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_1(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}s'$$

$$-\int_{S_{ob}}\psi_1(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s',\quad \boldsymbol{r}\in S_{\mathrm{r}} \tag{6.8b}$$

$$\frac{1}{2}\psi_0(\boldsymbol{r})=\psi_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r})+\int_{S_{\mathrm{r}}}\left[\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}s'$$

$$+\int_{S_{oa}}\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s',\quad \boldsymbol{r}\in S_{oa} \tag{6.8c}$$

$$\frac{1}{2}\psi_1(\boldsymbol{r})=-\int_{S_{\mathrm{r}}}\left[\psi_1(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_1(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}s'$$

$$-\int_{S_{ob}}\psi_1(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s',\quad \boldsymbol{r}\in S_{ob} \tag{6.8d}$$

其中，S_{oa}和S_{ob}为舰船目标露出海面的部分和淹没于海水的部分，其余参数表达式可参考6.1.1小节内容。

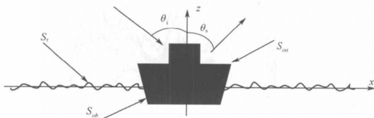


图6.7　粗糙海面与上方二维舰船目标复合散射示意图

2. 矩阵方程的建立

粗糙海面沿x方向剖分了N_{r}段，舰船露出海水的部分沿其表面轮廓剖分了N_{oa}段，舰船在海水下方部分沿表面轮廓剖分了N_{ob}段。与上节相同，结合边界条件(6.2a)和式(6.2b)，利用矩量法对上面4个耦合的标量积分方程进行离散，可以得到以下矩阵方程：

$$\begin{bmatrix}\bar{\bar{\boldsymbol{A}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{B}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{C}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{0}}}\\ \bar{\bar{\boldsymbol{D}}} & -\rho\bar{\bar{\boldsymbol{E}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{0}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{F}}}\\ \bar{\bar{\boldsymbol{G}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{H}}} & \bar{\bar{I}} & \bar{\bar{\boldsymbol{0}}}\\ \bar{\bar{\boldsymbol{J}}} & -\rho\bar{\bar{\boldsymbol{K}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{0}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{L}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{V}}_1\\ \bar{\boldsymbol{V}}_2\\ \bar{\boldsymbol{V}}_3\\ \bar{\boldsymbol{V}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{i}}\\ \bar{\boldsymbol{0}}\\ \bar{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{i}}\\ \bar{\boldsymbol{0}}\end{bmatrix}$$

$$
\Leftrightarrow\begin{bmatrix}[N_r\times N_r] & [N_r\times N_r] & [N_r\times N_{oa}] & [N_r\times N_{ob}]\\ [N_r\times N_r] & [N_r\times N_r] & [N_r\times N_{oa}] & [N_r\times N_{ob}]\\ [N_{oa}\times N_r] & [N_{oa}\times N_r] & [N_{oa}\times N_{oa}] & [N_{oa}\times N_{ob}]\\ [N_{ob}\times N_r] & [N_{ob}\times N_r] & [N_{ob}\times N_{oa}] & [N_{ob}\times N_{ob}]\end{bmatrix}
$$

$$
\times\begin{bmatrix}[N_r\times 1]\\ [N_r\times 1]\\ [N_{oa}\times 1]\\ [N_{ob}\times 1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[N_r\times 1]\\ [N_r\times 1]\\ [N_{oa}\times 1]\\ [N_{ob}\times 1]\end{bmatrix} \tag{6.9}
$$

其中，$V_1(x)=\psi_0(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}\in S_r)$，$V_2(x)=\dfrac{\partial\psi_0(\boldsymbol{r})}{\partial n}(\boldsymbol{r}\in S_r)$，$V_3(x)=\psi_0(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}\in S_{oa})$，$V_4(x)=\psi_1(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}\in S_{ob})$，矩阵块$\bar{\bar{\boldsymbol{A}}},\bar{\bar{\boldsymbol{B}}},\bar{\bar{\boldsymbol{C}}},\bar{\bar{\boldsymbol{D}}},\bar{\bar{\boldsymbol{E}}},\bar{\bar{\boldsymbol{F}}},\bar{\bar{\boldsymbol{G}}},\bar{\bar{\boldsymbol{H}}},\bar{\bar{\boldsymbol{I}}},\bar{\bar{\boldsymbol{J}}},\bar{\bar{\boldsymbol{K}}}$和$\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}$中各元素表达式为

$$
A_{mn}=\begin{cases}-\gamma_n\Delta x\dfrac{\mathrm{i}k_0}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{R})H_1^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|), & m\neq n\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{f''(x_m)\Delta x}{4\pi\gamma_m^2}, & m=n\end{cases} \tag{6.10a}
$$

$$
B_{mn}=\begin{cases}\gamma_n\Delta x\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|), & m\neq n\\ \gamma_m\Delta x\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(\dfrac{k_0\Delta x\gamma_m}{2\mathrm{e}}\right), & m=n\end{cases} \tag{6.10b}
$$

$$
D_{mn}=\begin{cases}\gamma_n\Delta x\dfrac{\mathrm{i}k_1}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{R})H_1^{(1)}(k_1|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|), & m\neq n\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{f''(x_m)\Delta x}{4\pi\gamma_m^2}, & m=n\end{cases} \tag{6.10c}
$$

$$
E_{mn}=\begin{cases}\gamma_n\Delta x\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_1|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|), & m\neq n\\ \gamma_m\Delta x\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(\dfrac{k_1\Delta x\gamma_m}{2\mathrm{e}}\right), & m=n\end{cases} \tag{6.10d}
$$

$$
C_{mp}=-\Delta o\frac{\mathrm{i}k_0}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}_o\cdot\boldsymbol{R}_1)H_1^{(1)}\left(k_0|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_{op}|\right) \tag{6.10e}
$$

$$
F_{mp}=-\Delta o\frac{\mathrm{i}k_1}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}_o\cdot\boldsymbol{R}_1)H_1^{(1)}\left(k_1|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_{op}|\right) \tag{6.10f}
$$

$$
G_{qn}=-\gamma_n\Delta x\frac{\mathrm{i}k_0}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{R}_2)H_1^{(1)}\left(k_0|\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_n|\right) \tag{6.10g}
$$

$$
H_{qn}=\gamma_n\Delta x\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(k_0|\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_n|\right) \tag{6.10h}
$$

$$
I_{qp}=\begin{cases}-\Delta o\dfrac{\mathrm{i}k_0}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}_o\cdot\boldsymbol{R}_3)H_1^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_{op}|), & q\neq p\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{Z_o''(x_{op})\Delta o}{4\pi\gamma_{op}^2}, & q=p\end{cases} \tag{6.10i}
$$

$$J_{qn} = \gamma_n \Delta x \frac{\mathrm{i}k_1}{4}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{R}_2) H_1^{(1)}\left(k_1 \left| \boldsymbol{r}_{oq} - \boldsymbol{r}_n \right|\right) \tag{6.10j}$$

$$K_{qn} = -\gamma_n \Delta x \frac{\mathrm{i}}{4} H_0^{(1)}\left(k_1 \left| \boldsymbol{r}_{oq} - \boldsymbol{r}_n \right|\right) \tag{6.10k}$$

$$L_{qp} = \begin{cases} -\Delta o \dfrac{\mathrm{i}k_1}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}_o \cdot \boldsymbol{R}_3) H_1^{(1)}(k_1 \left| \boldsymbol{r}_{oq} - \boldsymbol{r}_{op} \right|), & q \neq p \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{Z_o''(x_{op})\Delta o}{4\pi \gamma_{op}^2}, & q = p \end{cases} \tag{6.10l}$$

每个矩阵块中元素的具体表达式可参考 6.1.1 小节，这里不再赘述。

在求解矩阵方程(6.9)后，海水上方空间的远区散射场可以按如下计算：

$$\psi_s = \frac{\exp(\mathrm{i}k_0 r)}{\sqrt{r}} \psi_s^N(\theta_s, \theta_i) \tag{6.11}$$

其中，

$$\begin{aligned} \psi_s^N(\theta_s, \theta_i) = & \frac{\mathrm{i}}{4} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi k_0}} \left\{ \int_{S_r} [-\mathrm{i}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{k}_s) V_1(x) - V_2(x)] \right. \\ & \times \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s \cdot \boldsymbol{r}) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \mathrm{d}x - \int_{S_{oa}} \mathrm{i}(\hat{\boldsymbol{n}}_o \cdot \boldsymbol{k}_s) V_3(x) \\ & \left. \times \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s \cdot \boldsymbol{r}) \sqrt{1 + [Z_o'(x)]^2} \right\} \end{aligned} \tag{6.12}$$

将式(6.12)代入式(6.7)可得到复合散射系数。

3. 数值计算及结果分析

舰船模型的具体电尺寸如图 6.8 所示，其中，入射电磁波频率为 1GHz，粗糙海面长度为 140λ，锥形波因子 $g=\lambda/4$，所得结果均是基于 100 个粗糙海面样本。

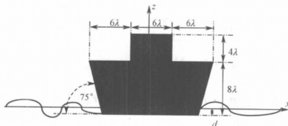


图 6.8　舰船模型尺寸示意图

图 6.9 给出了不同风速下，一维 PM 谱海面及其与上方舰船目标的复合电磁散射系数的对比，通过与图 6.2 中单纯海面电磁散射系数的对比，可以发现粗糙海面与舰船目标的复合散射系数比单纯粗糙海面稍大，尤其在镜向方向附近。并且复合散射系数曲线比单纯海面的散射曲线振荡剧烈，同时还可以发现复合模型的

散射系数对于海况(风速)变化不是很敏感。

图 6.10 给出了入射角和船的吃水深度对于海面及舰船目标复合散射系数的影响。显然,舰船的吃水深度 d 的变化对于散射系数的改变也不十分明显,这主要由于海水是高导电体,电磁波透射到海水中的能量几乎全部被海水吸收,所以该复合模型的复合散射系数主要依靠海面以及舰船目标在海上的部分。另外,随着入射角的增加,复合散射系数的镜向方向分量减小,但散射系数后向附近散射分量增强。因此,对于单站雷达在捕获海面上方舰船目标时,照射角越大,船体越容易被探测到。

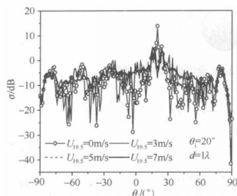


图 6.9　不同风速下的复合散射系数

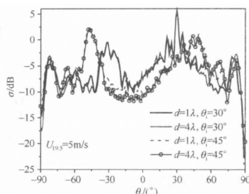


图 6.10　不同入射角与舰船吃水深度时的散射系数

6.1.3　矩量法计算粗糙地面与其下方目标复合电磁散射

1. 积分方程的建立

图 6.11 给出了一维介质粗糙面与其下方目标复合电磁散射示意图。粗糙表面轮廓仍记为 S_r,目标表面轮廓记为 S_o,H 表示埋藏目标的埋藏深度(目标中心与粗糙面中心之间的距离),d 为埋藏目标中心相对粗糙面中心沿横向 x 的偏移距离。

仍考虑垂直极化波 $\psi_i(\boldsymbol{r})$ 入射到一维粗糙面上,$\psi_0(\boldsymbol{r})$ 表示粗糙面 S_r 表面任意点的总场,$\psi_1(\boldsymbol{r})$ 表示粗糙面 S_r 下表面和目标表面任意点的总场,它们分别满足以下边界方程:

$$\frac{1}{2}\psi_0(\boldsymbol{r})-\int_{S_r}\left[\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}s'=\psi_i(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in S_r \tag{6.13a}$$

$$\frac{1}{2}\psi_1(\boldsymbol{r})+\int_{S_r}\left[\psi_1(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_1(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}s' +\int_{S_0}\psi_1(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'=0,\quad \boldsymbol{r}\in S_r \tag{6.13b}$$

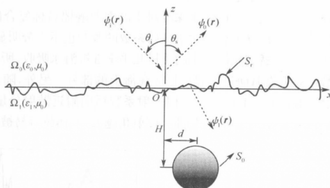


图 6.11　一维粗糙面与下方目标复合电磁散射示意图

$$\frac{1}{2}\psi_1(\boldsymbol{r})+\int_{S_r}\left[\psi_1(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_1(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}s'$$
$$+\int_{S_0}\psi_1(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'=0,\quad \boldsymbol{r}\in S_0 \tag{6.13c}$$

其中，$G_{0,1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_{0,1}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$，$\frac{\partial G_{0,1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}=\frac{\mathrm{i}k_{0,1}}{4}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}H_1^{(1)}(k_{0,1}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$。对于粗糙面 S_r 上的任意点 $\boldsymbol{r}$，$\psi_0(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi_1(\boldsymbol{r})$ 满足如式(6.2)所给的边界条件。结合边界条件，式(6.13a)～式(6.13c)可以重新写成如下形式：

$$\frac{1}{2}\psi_0(\boldsymbol{r})-\int_{S_r}\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'+\int_{S_r}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'=\psi_i(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in S_r \tag{6.14a}$$

$$\frac{1}{2}\psi_0(\boldsymbol{r})+\int_{S_r}\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'-\rho\int_{S_r}G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'$$
$$+\int_{S_0}\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'=0,\quad \boldsymbol{r}\in S_r \tag{6.14b}$$

$$\int_{S_r}\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'-\rho\int_{S_r}G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'+\frac{1}{2}\psi_0(\boldsymbol{r})$$
$$+\int_{S_0}\psi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'=0,\quad \boldsymbol{r}\in S_0 \tag{6.14c}$$

2. 矩阵方程的建立

将粗糙面 S_r 沿 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向离散，将目标沿其表面轮廓 S_0 离散，与 6.1.1 小节和 6.1.2 小节类似，利用矩量法可以将式(6.14)的积分方程离散化为下面的矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{\boldsymbol{A}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{B}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{0}}} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{C}}} & -\rho\bar{\bar{\boldsymbol{D}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{E}}} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{F}}} & -\rho\bar{\bar{\boldsymbol{G}}} & \bar{\bar{\boldsymbol{H}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{V}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{V}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{V}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{i}} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

解向量分别为

$$\boldsymbol{V}_1(x) = \psi_0(\boldsymbol{r})\big|_{r\in S_r} \tag{6.16a}$$

$$\boldsymbol{V}_2(x) = \frac{\partial\psi_0(\boldsymbol{r})}{\partial n}\bigg|_{r\in S_r} \tag{6.16b}$$

$$\boldsymbol{V}_3(x) = \psi_1(\boldsymbol{r})\big|_{r\in S_0} \tag{6.16c}$$

矩阵总共由 9 个大小不一的矩阵块组成，其中，前四个矩阵块元素可以分别表示为

$$A_{mn} = \begin{cases} -\gamma_n\Delta x\,\dfrac{\mathrm{i}k_0}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{R}_{mn})H_1^{(1)}\left(k_0\,|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|\right), & m\neq n \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{f''(x_m)\Delta x}{4\pi\gamma_m^2}, & m=n \end{cases} \tag{6.17a}$$

$$B_{mn} = \begin{cases} \gamma_n\Delta x\,\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(k_0\,|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|\right), & m\neq n \\ \gamma_m\Delta x\,\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(\dfrac{k_0\Delta x\gamma_m}{2\mathrm{e}}\right), & m=n \end{cases} \tag{6.17b}$$

$$C_{mn} = \begin{cases} \gamma_n\Delta x\,\dfrac{\mathrm{i}k_1}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{R}_{mn})H_1^{(1)}\left(k_1\,|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|\right), & m\neq n \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{f''(x_m)\Delta x}{4\pi\gamma_m^2}, & m=n \end{cases} \tag{6.17c}$$

$$D_{mn} = \begin{cases} \gamma_n\Delta x\,\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(k_1\,|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_n|\right), & m\neq n \\ \gamma_m\Delta x\,\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(\dfrac{k_1\Delta x\gamma_m}{2\mathrm{e}}\right), & m=n \end{cases} \tag{6.17d}$$

从式(6.17a)～式(6.17d)可以看出$\bar{\bar{\boldsymbol{A}}},\bar{\bar{\boldsymbol{B}}},\bar{\bar{\boldsymbol{C}}},\bar{\bar{\boldsymbol{D}}}$ 四个矩阵块仅与粗糙面的信息有关而与目标无关，假设粗糙面的采样点数为 N_1，则$\bar{\bar{\boldsymbol{A}}},\bar{\bar{\boldsymbol{B}}},\bar{\bar{\boldsymbol{C}}},\bar{\bar{\boldsymbol{D}}}$ 四个矩阵块大小均为 $N_1\times N_1$。

$$E_{mp} = \Delta o\,\frac{\mathrm{i}k_1}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{o}}\cdot\boldsymbol{R}_{mp})H_1^{(1)}\left(k_1\,|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_{op}|\right) \tag{6.17e}$$

$$F_{qn} = \gamma_n\Delta x\,\frac{\mathrm{i}k_1}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{R}_{qn})H_1^{(1)}\left(k_1\,|\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_n|\right) \tag{6.17f}$$

$$G_{qn} = -\gamma_n\Delta x\,\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}\left(k_1\,|\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_n|\right) \tag{6.17g}$$

$$H_{qp} = \begin{cases} \Delta o\,\dfrac{\mathrm{i}k_1}{4}(\hat{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{o}}\cdot\boldsymbol{R}_{qp})H_1^{(1)}\left(k_1\,|\boldsymbol{r}_{oq}-\boldsymbol{r}_{op}|\right), & q\neq p \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{Z_{\mathrm{o}}''(x_{op})\Delta x}{4\pi\gamma_{op}^2}, & q=p \end{cases} \tag{6.17h}$$

上面$\bar{\bar{E}}$,$\bar{\bar{F}}$,$\bar{\bar{G}}$代表粗糙面和目标耦合作用的矩阵块,$\bar{\bar{E}}$矩阵块大小为 $N_1 \times N_2$,$\bar{\bar{F}}$矩阵块为 $N_2 \times N_1$,$\bar{\bar{G}}$ 矩阵块为 $N_2 \times N_1$,而$\bar{\bar{H}}$ 矩阵块仅仅由目标信息决定,其大小为 $N_2 \times N_2$。

$$\boldsymbol{R}_{ij} = \frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}, \quad i = m,q, j = n,p \tag{6.18}$$

其他参数具体表达式参见 6.1.1 小节。解矩阵方程可以求得 $\bar{\boldsymbol{V}}_1$ 和 $\bar{\boldsymbol{V}}_2$,散射场表达式为

$$\psi_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r}}{\sqrt{r}} \psi_{\mathrm{s}}^{N}(\theta_{\mathrm{s}}, \theta_{\mathrm{i}}) \tag{6.19}$$

其中,

$$\psi_{\mathrm{s}}^{N}(\theta_{\mathrm{s}}, \theta_{\mathrm{i}}) = \frac{\mathrm{i}}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \left\{ \int_{S_r} [-\mathrm{i}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{k}_s) V_1(x) - V_2(x)] \right. \\ \left. \times \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}} \cdot \boldsymbol{r}) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x \right. \tag{6.20}$$

将式(6.20)代入式(6.7)可得到复合散射系数。

3. 数值计算及结果分析

一般来说,在微波段土壤的相对介电常数对雷达回波的影响是很大的,相对介电常数越大,反射雷达波束的作用越强,透射作用越小,而且土壤的相对介电常数和土壤湿度有很大的关系[2]。就土壤电磁特性而言,土壤是由空气、固态土壤、束缚水和自由水 4 种物质组成的介电混合体。由于作用于束缚水的吸附力非常强,束缚水分子与入射电磁波相互作用的方式与自由水分子有很大的不同,使束缚水和自由水的介电特性各异。束缚水、自由水的相对介电常数都是入射电磁波的频率、物理温度、盐度的函数。一般来说,土壤的相对介电常数主要受到以下几个方面的影响[3](表 6.1)。

表 6.1　土壤相对介电常数影响因素

影响因素	入射频率	均方根高度	相关长度	土壤湿度	土壤表面温度	土壤沙含量	土壤黏土含量
符号表示	f/GHz	δ/m	l/m	m_v/(g/cm³)	T/℃	S/%	C/%

土壤的相对介电常数用以下形式表示:

$$\varepsilon = \varepsilon' + \mathrm{i}\varepsilon'' \tag{6.21}$$

式(6.21)中,ε'为相对介电常数的实部,其含义为在两种不同介质表面发生的波的折射和反射现象,与介质的介电特性有关,ε''为相对介电常数的虚部,与入射电磁波在介质中的衰减(吸收和转化)有关。

Wang 和 Schmugge 建立了一种四成分模型[3]。设干的土壤中沙土含量

($S\%$)和黏土含量($C\%$)，其中，$S+C\leqslant 100$，定义土壤的湿度压缩点为

$$W_P = 0.06774 - 0.00064\times S + 0.00478\times C \tag{6.22}$$

则临界体湿度的经验公式为

$$m_t = 0.49W_P + 0.165 \tag{6.23}$$

定义参数 $\beta=-0.57W_P+0.481$。一般情况下，土壤中岩石的密度 $\rho_r=2.6\text{g/cm}^3$，设干土壤的密度为 ρ_b，则土壤的积孔率为

$$p = 1-\frac{\rho_b}{\rho_r} \tag{6.24}$$

ρ_b 由下面公式确定[2]：

$$\rho_b=\frac{3.455}{R^{0.3018}} \tag{6.25}$$

$$R = 25.1 - 0.21\times S + 0.22\times C \tag{6.26}$$

上面的参数确定后，可以根据土壤湿度来计算其等效相对介电常数。当 $m_v\leqslant m_t$ 时，

$$\varepsilon = m_v\varepsilon_x + (p-m_v)\varepsilon_a + (1-p)\varepsilon_r \tag{6.27}$$

其中，$\varepsilon_x=\varepsilon_i+(\varepsilon_w-\varepsilon_i)\dfrac{m_v}{m_t}\beta$。当 $m_v>m_t$ 时，

$$\varepsilon = m_t\varepsilon_x + (m_v-m_t)\varepsilon_w + (p-m_v)\varepsilon_a + (1-p)\varepsilon_r \tag{6.28}$$

其中，$\varepsilon_x=\varepsilon_i+(\varepsilon_w-\varepsilon_i)\beta$，$\varepsilon_i=(3.2,0.1)$是冰的相对介电常数，$\varepsilon_r=(5.0,0.1)$为岩石的相对介电常数，$\varepsilon_a=1.0$ 为空气的相对介电常数，而 ε_w 为纯水的相对介电常数，它可以由 Debye 公式计算

$$\varepsilon_w = 4.9 + \frac{\varepsilon_{w0}-4.9}{1+\mathrm{i}2\pi f\tau_w} \tag{6.29}$$

其中，

$$\varepsilon_{w0}(T) = 88.045 - 0.4147T + 6.295\times10^{-4}T^2 + 1.075\times10^{-5}T^3 \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned}2\pi\tau_w(T) = {} & 1.1109\times10^{-10} - 3.824\times10^{-12}T \\ & + 6.938\times10^{-14}T^2 - 5.096\times10^{-16}T^3\end{aligned} \tag{6.31}$$

T 为土壤的摄氏温度。当给定工作频率、土壤成分及土壤温度和湿度后，可以利用上述公式计算出土壤的等效(相对)介电常数。表 6.2 给出了不同类型土壤的含沙量和黏土含量[3]。

表 6.2　不同土壤类型含沙量与黏土含量表

土壤类型	含沙量(S)/%	黏土含量(C)/%
沙壤土	51.5	13.5
粉沙壤土	17.2	19.0
粉质黏土	5.0	47.4

图 6.12 给出了入射频率为 4.7GHz 时不同类型土壤的相对介电常数随土壤体积含水量的变化情况，其中，土壤温度为 20℃。从图中可以看出当土壤体积含水量增大时，土壤的相对介电常数实部迅速增大，虚部有减小的趋势，但在土壤湿度小的情况下，这种变化趋势不是很明显。图 6.13 给出了土壤相对介电常数随入射频率的变化情况，其中，土壤湿度 $m_v=0.15$。从图中可以看出随着频率的增大，土壤相对介电常数的实部逐渐减小，虚部逐渐增大。同时，从图中还可以看出土壤类型对土壤的相对介电常数有很大的影响，所以在进行土壤散射计算时，必须要考虑土壤的类型。

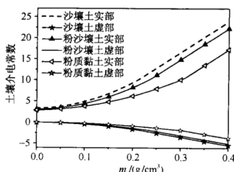


图 6.12 土壤相对介电常数随土壤体积含水量的变化

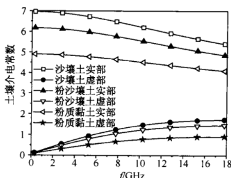


图 6.13 土壤相对介电常数随频率的变化情况

在以下数值结果中，仍以圆柱目标为例，土壤轮廓的模拟均采用指数谱粗糙面，粗糙面长度为 51.2λ，锥形波因子 $g=\lambda/4$，统计样本数为 100。图 6.14 首先给出了地面与其下方目标复合散射系数随土壤类型的变化，其中，地面粗糙度为 $\delta=0.05\lambda$，$l=0.5\lambda$，圆柱半径为 1.5λ，埋藏深度为 $H=2\lambda$，入射角为 30°，入射频率为 $f=1.2$GHz，土壤湿度和温度分别为 $m_v=0.15\text{g/cm}^3$，$T=20$℃，对于不同的土壤类型，可以依据入射波频率及土壤湿度、温度计算其相应的土壤等效相对介电常数 ε，如图 6.14 所示。可以看出从沙壤土到粉质黏土，复合散射的镜向幅值有所降低，这是因为随着土壤组分的改变，相对介电常数也随之发生变化，粉质黏土相较沙壤土的相对介电常数小，所以镜向散射系数的幅值较沙壤土及粉沙壤土更

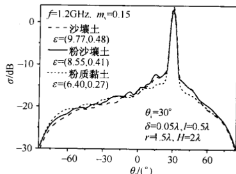


图 6.14 复合散射系数随土壤类型的变化

小。另外，由于这三种土壤组分的相对介电常数相差并不是很大，所以除了镜向散射方向以外的散射系数幅值差异并不是很大。

图 6.15 给出了地面与其下方目标复合散射系数随土壤湿度的变化，其中，土壤类型为粉沙壤土，土壤湿度分别取 0.1g/cm³，0.2g/cm³，0.4g/cm³，其他参数同图 6.14。对于确定的土壤类型，由于土壤湿度发生了变化，也可以得到其对应不同湿度的等效介电常数 ε，如图 6.15 所示。从图中可以看出随着粉沙壤土湿度的改变，其相对介电常数发生了很大的变化，镜向散射幅值随着土壤湿度的增大而增大。同时，由于三种湿度相应的等效介电常数差异较大，所以除镜向方向外，非相干散射幅值变化也较明显。

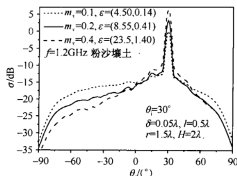


图 6.15　复合散射系数随土壤湿度的变化

图 6.16 给出了地面与其下方目标复合散射系数随土壤均方根高度的变化，其中，土壤类型为沙壤土，入射波频率 $f=3\text{GHz}$，相对介电常数 $\varepsilon=(6.91,0.63)$，其他参数同图 6.14。图 6.16(a)的均方根高度变化范围为 $\delta=0.05\lambda\sim0.3\lambda$，图 6.16(b)均方根高度变化范围为 $\delta=0.3\lambda\sim0.6\lambda$。从图中可以看出随着均方根高度的增大，双站散射系数镜向幅值均有所减小。另外，从图 6.16(b)还可以发现当均方根高度增加到一定程度时，镜向方向不再是整个散射范围内散射系数幅值最大的方向，取而代之的是后向散射方向，其散射系数幅值最大，即后向增强效应较明显。这与均方根高度较小的情况(图 6.16(a))有所不同。

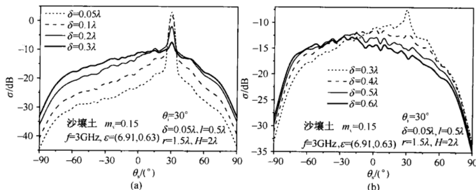


图 6.16　复合散射系数随土壤均方根高度的变化

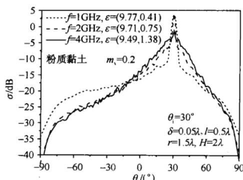


图 6.17　不同入射频率下的复合散射系数

图 6.17 给出了复合散射系数随入射波频率的变化情况，其中，土壤类型为粉质黏土，土壤湿度为 $m_v=0.2\text{g/cm}^3$，相关计算参数如图 6.17 所示。随着入射波频率的增大，等效介电常数实部减小，虚部增大，但总体而言，虚部较实部数值很小，所以散射系数幅值在一定程度上主要取决于实部的变化，可以发现随着入射波频率的增大，散射曲线的镜向峰值逐渐减小，这主要是由于在计算复合散射系数随入射波频率的变化时，地面的粗糙度($\delta=0.05\lambda, l=1.5\lambda$)及目标参数均固定，入射波频率越高，入射波长越短，则粗糙面的相对粗糙度就越大，加之等效介电常数的实部随入射波频率的增大而减小，所以散射曲线的镜向峰值随入射波频率的增大而减小。

6.2　Kirchhoff 近似与矩量法的混合算法在粗糙面与目标复合散射中的应用

1. 混合算法的公式推导

图 6.18 给出电磁波照射到一维导体粗糙面与上方导体目标的复合散射模型，可将散射区域划分为 MOM 区域和 KA 区域，原则上，这种划分具有任意性，但通常鉴于目标尺寸较粗糙面小得多，为了尽量减少计算量，一般将目标划分到 MOM 区域，而将粗糙面划分到 KA 区域。

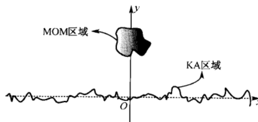


图 6.18　一维导体粗糙面与其上方二维目标的复合散射示意图

假设将目标划分为 N 段，将粗糙面的表面轮廓划分为 P 段。考虑电磁波照射到如图 6.18 所示的复合模型上，分别在目标和粗糙面表面激发出表面感应电流 $\boldsymbol{J}^{\text{MOM}}$ 和 $\boldsymbol{J}^{\text{KA}}$，它们分别可以用脉冲基函数 $\boldsymbol{f}_n$ 和 $\boldsymbol{f}_p$ 展开为

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{MOM}} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \boldsymbol{f}_n \tag{6.32}$$

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{KA}} = \sum_{p=1}^{P} \beta_p \boldsymbol{f}_p \tag{6.33}$$

其中，α_n 和 β_p 分别为表面电流展开系数。表面感应电流在自由空间中激发的电场和磁场可以分别表示为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{J}) \tag{6.34}$$

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{J}) \tag{6.35}$$

其中，$\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}$ 和 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}$ 分别为电场和磁场算子，其定义如下[4]：

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{J}) = \mathrm{i}\omega\mu\int_{\Gamma}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{I}}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)\cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Gamma' \tag{6.36}$$

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{J}) = \nabla\times\int_{\Gamma}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Gamma' \tag{6.37}$$

其中，$\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}$ 为单位并矢，k 为自由空间中的波数，$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 为二维自由空间格林函数。相对于 MOM 区域中的表面电流展开系数 α_n，KA 区域的电流展开系数 β_p 可借助于 Kirchhoff 近似求得。对于大尺度导体粗糙面而言，由 KA 近似可得

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\mu\int_{\Gamma}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{I}}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)\cdot 2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Gamma' \tag{6.38}$$

其中，$\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}$表示入射磁场，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 表示粗糙表面任意点的法向矢量。由式(6.34)、式(6.36)和式(6.38)可 Kirchhoff 近似下 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{KA}}$的表达式为

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{KA}}(\boldsymbol{r}) = 2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}) \tag{6.39}$$

由式(6.39)可以看出当粗糙面上方不存在目标时，粗糙表面的感应电流 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{KA}}$仅仅是由入射磁场 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}$决定。在粗糙面与目标复合散射的研究中，过去一贯认为粗糙面和目标的散射是分开且孤立进行的，事实上，当电磁波入射时，不能将目标散射和粗糙面的散射割裂为两个孤立的问题来处理，而应将目标与粗糙面看成一个整体，既要考虑目标与粗糙面各自独立的电磁散射，又要考虑目标与粗糙面之间的相互耦合作用，这种相互作用的结果产生了耦合散射分量，所以，考虑到粗糙面上方目标的存在，在计算粗糙表面的感应电流 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{KA}}$时必须考虑 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{MOM}}$对其的影响，结合式(6.32)和式(6.35)，式(6.39)可以改写为[5]

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{KA}}(\boldsymbol{r}) = 2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}) + 2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{L}^{h}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\boldsymbol{f}_n\right) \tag{6.40}$$

式(6.40)等号右边第一项是由入射波直接照射粗糙面产生的 KA 电流，通常 KA 电流仅是由 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}$决定的，第二项中的磁场算子 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}$ 作用于基函数 $\boldsymbol{f}_n$ 的求和式 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\boldsymbol{f}_n\right)$ 可以看成入射波照射到目标上，散射波作为粗糙面上的次入射源，

$2\hat{\boldsymbol{n}}\times$作用到$\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\boldsymbol{f}_n\right)$得到了次入射源激发的感应电流。对比式(6.33)和式(6.40)，可以得到β_p的表达式为

$$\beta_p=\left[2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}_p)\cdot\hat{\boldsymbol{f}}_p+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n 2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{f}_n)\cdot\hat{\boldsymbol{f}}_p\right]\tag{6.41}$$

对于水平极化方式(HH)，电流基函数的方向沿$\hat{z}$方向(图6.18)，式(6.41)可以改写为

$$\beta_p=\left[2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}_p)\cdot\hat{z}+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n 2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{f}_n)\cdot\hat{z}\right]\tag{6.42}$$

将β_p代入式(6.33)可得

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{KA}}=\sum_{p=1}^{P}\left[2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}_p)\cdot\hat{z}+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n 2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{f}_n)\cdot\hat{z}\right]\boldsymbol{f}_p\tag{6.43}$$

导体目标表面(MOM区域)的电场积分方程(EFIE)为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{in}}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}=0\tag{6.44}$$

结合式(6.34)可得

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{in}}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{MOM}})+\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{KA}})=0\tag{6.45}$$

将式(6.32)和式(6.43)代入式(6.45)可得

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}\left[\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\boldsymbol{f}_n\right]+\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}\left[\sum_{p=1}^{P}\left[2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}_p)\cdot\hat{z}+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n 2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{f}_n)\cdot\hat{z}\right]\boldsymbol{f}_p\right]=-\boldsymbol{E}^{\mathrm{in}}\tag{6.46}$$

在这里两种不同的耦合机制同时体现在KA区域和MOM区域。一方面，MOM区域对KA区域的作用体现在式(6.40)KA电流的表述上；另一方面，式(6.46)又表明在MOM区域的EFIE中也考虑了KA区域电流的贡献。式(6.46)可以写成

$$\hat{z}\cdot\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}\left[\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\boldsymbol{f}_n\right]+\hat{z}\cdot\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}\left[\sum_{p=1}^{P}\left[2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}_p)\cdot\hat{z}+2\hat{\boldsymbol{n}}\times\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\boldsymbol{L}^{h}(\boldsymbol{f}_n)\cdot\hat{z}\right]f_p\right]=-E^{\mathrm{in}}\tag{6.47}$$

交换式(6.47)中p,n次序有

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left[\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{f}_n)\cdot\hat{z}+\sum_{p=1}^{P}\left[(2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{f}_n)\cdot\hat{z})\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{f}_p)\cdot\hat{z}\right]\right]$$
$$=-E^{\mathrm{in}}-\sum_{p=1}^{P}\left[(2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}_p)\cdot\hat{z})\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{f}_p)\cdot\hat{z}\right]\tag{6.48}$$

同理，对于垂直极化(VV)应用磁场积分方程(MEIE)经过类似推导最终可以得到

$$\hat{z}\cdot\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{KA}})+\hat{z}\cdot\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{MOM}})-J^{\mathrm{MOM}}=-H^{\mathrm{in}}\tag{6.49}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n \hat{z}\cdot\left[\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{f}_n)+2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{f}_n)\sum_{p=1}^{P}\hat{z}\cdot\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{f}_p)\right]-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n \boldsymbol{f}_n$$

$$=-H^{\mathrm{in}}-\sum_{p=1}^{P}\hat{z}\cdot\left[2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}_p)\cdot\hat{z}\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{f}_p)\right] \tag{6.50}$$

对上面的积分方程(6.48)和式(6.50)进行离散化，便可求解得到目标上的表面感应电流 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{MOM}}$ 的展开系数 α_n，将 α_n 代入式(6.41)可以求出粗糙面表面感应电流 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{KA}}$ 的展开系数 β_p。当目标与粗糙面的表面感应电流均求出后便可以应用 Stratton-Chu 公式求解远区散射场。从式(6.48)和式(6.50)可以很明显地看出本节混合算法得到的 EFIE/MEIE 中阻抗矩阵的大小取决于目标的网格划分点数 N，所以可以用于计算大尺度粗糙面与上方目标的复合散射问题，这也是本节混合算法较经典 MOM 求解复合问题的优势所在。

以下从物理思想上可以对本节混合算法作进一步解释。该算法是在考虑粗糙面作用的前提下对经典 MOM 中的阻抗矩阵和电压矩阵元素进行数值上的修正，从而得到新的阻抗矩阵和电压矩阵，如式(6.48)可以写成如下形式：

$$\hat{z}\cdot\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\boldsymbol{f}_n\right)+\hat{z}\cdot\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}\left(\sum_{p=1}^{P}\left[2\hat{\boldsymbol{n}}\times\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\boldsymbol{L}^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{f}_n)\cdot\hat{z}\right]\boldsymbol{f}_p\right)$$

$$=-E^{\mathrm{in}}-\sum_{p=1}^{P}2\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}_p)\cdot\boldsymbol{L}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{f}_p) \tag{6.51}$$

式(6.51)左边第一项是传统 MOM 中的阻抗矩阵 Z_{mn}，左边第二项是混合算法中对原阻抗矩阵的附加修正项，记为 Z_{mn}^{G}，它可以理解为第 n 个源电荷经过某一物理过程 G(由于粗糙面的存在)到达第 m 个检验电荷所产生的附加阻抗项，所以混合算法中新的阻抗矩阵可以写为

$$Z'=\left[Z_{mn}+Z_{mn}^{\mathrm{G}}\right] \tag{6.52}$$

同样，混合算法中的新的电压矩阵也可以表示为

$$V'=\left[V_m+V_m^{\mathrm{G}}\right] \tag{6.53}$$

其中，V_m^{G} 是入射波经过某一物理过程 G(由于粗糙面的存在)到达第 m 个检验电荷，从而在原电压矩阵 V_m 处产生的附加电压项。由于粗糙背景的存在，物理过程 G 可以理解为目标与粗糙面相互作用的一系列复杂的物理过程，这其中包含了目标与粗糙背景的所有耦合作用过程，因此，混合算法求解得到的目标和粗糙表面上的感应电流 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{MOM}}$ 和 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{KA}}$ 是既考虑了入射波的直接作用，又考虑了它们之间所有的耦合作用，这就从根本理论上保证了混合算法的精确性。式(6.52)和式(6.53)即组成了混合算法中的矩阵方程

$$\left[Z_{mn}+Z_{mn}^{\mathrm{G}}\right]\left[\alpha_n\right]=\left[V_m+V_m^{\mathrm{G}}\right] \tag{6.54}$$

式(6.54)左边第一，二项 Z_{mn} 和 Z_{mn}^{G} 分别对应式(6.51)左边的第一、二项，同样，右边的第一、二项也分别对应式(6.51)右边的第一、二项。

2. 矩量法对混合算法数值结果的验证

如图 6.19 所示，r 为目标的最大半径，h 为目标中心距离粗糙面的高度。为了尽量减少粗糙面的人为截断所引起的边缘效应，这里仍选取 Thorsos 锥形波作为入射波。

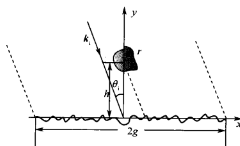


图 6.19　锥形波入射示意图

对于随机粗糙面而言，Thorsos 锥形波中的波束宽度 g 及粗糙面长度 L 的选取首先需要满足波动方程、相关长度及能量截断的要求，具体参见式(4.8)和式(4.9)。另外，g 要保证图 6.19 中目标上有足够入射波，可以选取[6]

$$g = 4\left(\frac{r}{\cos\theta_i} + h\tan\theta_i\right) \tag{6.55}$$

另外，粗糙面长度 L 的选取还必须充分考虑目标与其下方粗糙面的相互作用，一般需满足[6]

$$L \geqslant 2\left(\frac{r}{\cos\theta_{s,m}} + h\tan\theta_{s,m}\right) \tag{6.56}$$

其中，$\theta_{s,m}$是最大散射角。式(4.8)、式(4.9)和式(6.55)、式(6.56)共同给出了 L 及 g 在粗糙面与上方目标复合散射模型中的要求。

在上述理论基础上，以下以高斯粗糙面上方放置无限长圆柱目标为例，给出了混合算法的相关计算结果。计算过程中高斯粗糙面长度及目标尺寸均以波长为单位归一化，粗糙面统计样本数为 50。为了验证混合算法求解粗糙面与上方目标复合散射的有效性，图 6.20 分别应用 MOM 和混合算法计算了不同极化方式、不同粗糙度下一维高斯粗糙面与上方圆柱目标的双站散射系数，其中，圆柱半径及距离粗糙面高度分别为 λ 和 3λ。图 6.20(a)和(b)中，高斯粗糙面均方根高度 $\delta=0.05\lambda$，入射角分别为 30°和 50°。图 6.20(c)和(d)均方根高度 $\delta=0.2\lambda$，入射角分别为 20°和 60°。通过比较可以发现无论何种极化方式，不同粗糙度、不同入射角下两种方法求解得到的双站复合散射系数吻合得较好，从而验证了用混合算法求解导体粗糙面与上方目标复合电磁散射的可行性。

在具体计算中，由于 L 及 g 的选取范围遵循一定的要求(详见式(4.8)、式

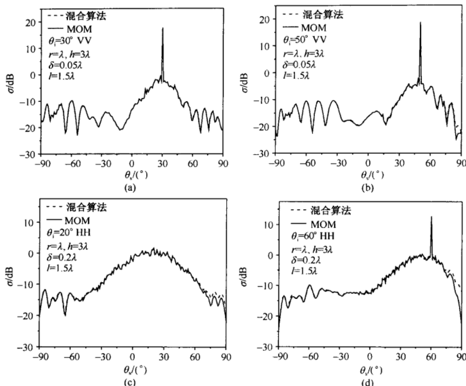


图 6.20　混合算法与 MOM 计算高斯导体粗糙面与上方圆柱双站散射系数结果的比较

(4.9)和式(6.55)、式(6.56)),即当计算条件(入射角、目标尺寸及位置等参数改变)发生变化时,L 和 g 的取值也应随之改变,所以对于图 6.20 中,不同计算条件下的散射曲线,计算机耗时性及内存需求不尽相同,为了展现本章混合算法较传统 MOM 的优势所在,表 6.3 将以图 6.20(a)和(b)为例,比较混合算法与 MOM 对计算机内存需求及耗时性。计算时采用的 PC 机内存为 1GB,主频 1.4GHz。图 6.20(a)和(b)中粗糙面长度 L 分别为 160λ 和 240λ。

从表 6.3 可以看出,混合算法较 MOM 的计算效率更高,占用计算机内存更少,纵向对比表 6.3 不难看出当粗糙面尺寸越大时,这种优势越明显。另外,需要注意的是表 6.3 仅仅是比较了单个样本的情形,众所周知,在关于随机粗糙面电磁散射的数值计算中,一般需要对粗糙面进行统计得到统计意义上的散射曲线,这里粗糙面的统计样本数为 50,显而易见,从统计后总的计算时间(单个样本计算时间×50)来看,混合算法的优势将更明显。

表 6.3　混合算法与 MOM 所需内存及耗时性的对比

	方 法	单个样本计算时间/s	计算时间的对比/%	内存需求/MB	内存需求对比/%
图 6.20(a)	混合算法	15	7.9	1.17	2.8
($L=160\lambda$)	MOM	190		42	
图 6.20(b)	混合算法	23	3.2	1.75	1.9
($L=240\lambda$)	MOM	720		92	

3. 数值计算及结果分析

下面仍以高斯粗糙面与上方无限长圆柱为例，利用本节混合算法给出导体粗糙面与上方导体目标的复合电磁散射特性。

图 6.21 利用混合算法计算了 VV 极化方式下，高斯粗糙面与其上方圆柱的复合散射系数随圆柱半径的变化情况，圆柱距离粗糙面中心高度 $h=5\lambda$，图中同时给出了单纯粗糙面的散射曲线。观察图中整个散射系数角分布可以看出在大部分散射角范围内，加目标后的复合散射系数明显比单纯粗糙面的散射系数大，尤其在远离镜向的非相干散射方向。这主要是因为加目标后，目标与粗糙面的耦合散射对非相干散射的贡献较大，而相干散射幅值大小主要还是取决于单纯粗糙面的散射。另外，从图中还可以发现复合散射系数随着圆柱半径的增大而增大，这主要是随着圆柱半径的增大，粗糙面与圆柱之间的耦合面积也随之增大，耦合散射增强的缘故。

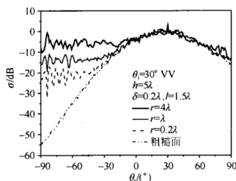


图 6.21　高斯粗糙面与上方圆柱的双站散射系数随圆柱半径的变化

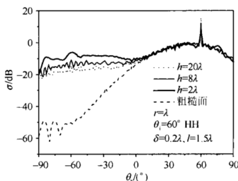


图 6.22　高斯粗糙面与上方圆柱的双站散射系数随圆柱高度的变化

图 6.22 计算了不同极化方式下粗糙面与上方目标复合散射系数随圆柱高度的变化情况。同样可以发现在非相干散射区域，加目标后的复合散射系数幅值要比单纯粗糙面散射系数大很多，并且随着圆柱高度的增大，它们的复合散射系数随之减小。另外与图 6.21 相比可以看出粗糙面与目标复合散射系数的幅值随 h 的变化没有随 r 的变化明显。

图 6.23 计算了不同均方根高度 δ 下的高斯粗糙面与上方目标的复合电磁散射系数，其中，圆柱半径及高度分别为 λ 和 5λ，粗糙面相关长度为 1.5λ，入射角为 30°。从图中可以发现当粗糙面的 δ 较小时，镜向区域有明显的尖峰，这主要是因为 δ 较小时，相干散射分量幅值较非相干分量大很多，随着 δ 的增大，其非相干散射分量比重增大，镜向方向尖峰逐渐消失。图 6.24 利用混合算法计算了不同相关长度下的高斯粗糙面与上方目标复合散射系数，粗糙面的均方根高度 $\delta=0.05\lambda$，其他参数同图 6.23。从图中可以发现无论相关长度大小，镜向方向均有明显的尖峰，这主要是由于均方根高度($\delta=0.05\lambda$)较小造成的，随着相关长度的减小，镜向峰值减小，非相干散射系数幅值有所增大。

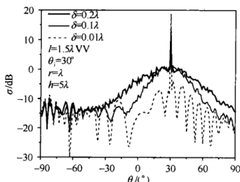


图 6.23 高斯粗糙面与其上方圆柱双站散射系数随均方根高度的变化

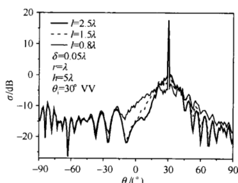


图 6.24 高斯粗糙面与其上方圆柱双站散射系数随相关长度的变化

6.3 时域有限差分方法在粗糙面与目标复合电磁散射中的应用

6.3.1 FDTD 在一维粗糙海面与二维目标复合电磁散射中的应用

3.3 节中运用 FDTD 研究了一维粗糙面的电磁散射特性，本节运用该方法求解一维 PM 海面与二维目标的复合电磁散射[7]，两者的理论基础均是基于二维 FDTD，差别仅在于复合 FDTD 计算区域中目标位置处由原来的真空的电磁参数变为目标的电磁参数。一维 PM 海面与二维目标的复合散射的 FDTD 计算区域划分如图 6.25 所示，采用 Mur 吸收边界条件来模拟开域的电磁散射特性。

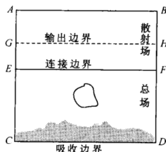


图 6.25 一维 PM 海面与二维目标复合散射的 FDTD 计算区域划分

下面以一维 PM 海面与其上方无限长导

体圆柱的复合散射为例，研究不同条件下的复合散射系数角分布。为计算方便，描述圆柱和海面的一些参数均以波长 λ 表示，海面的长度为 $L=180\lambda$，圆柱的高度表示从海平面到圆柱中心的距离，粗糙面的统计样本数为 45。

为了验证 FDTD 计算复合电磁散射的正确性，图 6.26 分别运用 MOM 和 FDTD 研究了 VV 极化下一维导体 PM 海面上方半径 $r=\lambda$，高度 $h=3\lambda$ 导体圆柱的复合散射特性。图中入射频率为 0.3GHz，风速为 $U_{19.5}=3\mathrm{m/s}$。从图 6.26 不难发现无论是 30°入射还是 60°入射，由 FDTD 得到的双站散射系数在整个散射角范围内与 MOM 的结果吻合得很好，这证实了本节方法计算一维海面与二维目标复合散射的可行性。

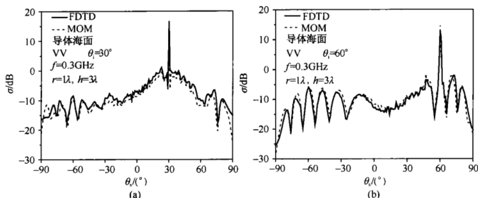


图 6.26　一维导体海面上方导体圆柱的复合散射系数 FDTD 方法和 MOM 的比较

图 6.27 研究了不同极化状态下一维介质海面上方 6λ 处导体圆柱的复合散射系数角分布随着圆柱半径的变化关系。图中入射频率为 3GHz，入射角为 30°，风速为 3m/s，海水的相对介电常数为(71.0, 38.0)[8]。由图可知不同极化下的复合模型的双站散射系数在远离镜向方向随着圆柱半径 r 的增大而增大，这主要是由于随着圆柱半径的增大，海面与目标之间的耦合散射面积增大，因此，它们之间的耦合散射增强，导致总的散射增大。但是在镜向方向附近的散射角范围内复合散射系数随着半径的变化不明显。

为了进一步研究目标与海面之间的复合散射特性，图 6.28 研究了 VV 极化下一维海面与其上方半径为 $r=1.0\lambda$ 的导体圆柱的复合散射系数随着圆柱高度的变化关系。图中入射频率为 1GHz，风速为 $U_{19.5}=5\mathrm{m/s}$，海水的相对介电常数[8]为(72.0, 84.0)。图 6.28(a)表示 30°入射的结果，图 6.28(b)表示 50°入射的结果。从图中不难发现在远离镜向方向复合散射系数随着圆柱高度的增大而减小。这是由于在远离镜向方向耦合散射场在总场中所占的比例较大，随着圆柱高度的增大，圆柱和海面之间的耦合面积减小，所以耦合场减小，导致复合散射随着高度的增大而减小。

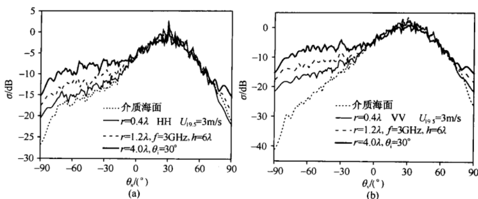


图 6.27　不同圆柱半径下一维介质海面与其上方圆柱的复合散射系数角分布

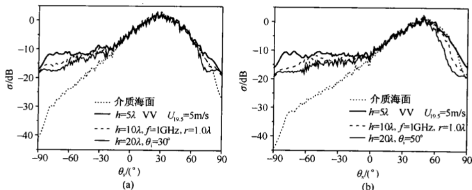


图 6.28　不同圆柱高度下一维介质海面与其上方圆柱的复合散射系数角分布

图 6.29 分析了 HH 极化下海面上方圆柱的复合散射系数随着入射角的变化规律。图中入射频率为 1GHz，圆柱的高度和半径分别为 3λ 和 λ。图 6.29(a)研究

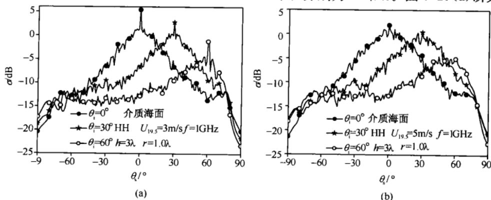


图 6.29　不同入射角下一维介质海面与其上方圆柱的复合散射系数角分布

的是风速为 3m/s 的结果，图 6.29(b)是风速为 5m/s 的结果。从图 6.29(a)和(b)中不难发现镜向方向上的散射系数随着入射角的增大而减小。另外，对于相同的入射角，风速为 3m/s 时比风速为 5m/s 时在镜向方向有更明显的散射尖峰，这是由于随着风速的增大，海面的粗糙度增大，非相干散射增强，导致镜向方向的尖峰不明显。

6.3.2　FDTD 在一维分层高斯粗糙面与二维目标复合电磁散射中的应用

本节运用 FDTD 求解一维分层高斯粗糙面与其上方任意二维目标的复合电磁散射特性[9]。图 6.30 给出了分层粗糙面与其上方目标的复合散射示意图，目标的高度为 h，上层粗糙面的厚度为 d，上层、下层介质以及目标的相对介电常数分别为 ε_1，ε_2 和 ε_3。

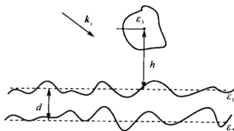


图 6.30　一维分层高斯粗糙面与其上方二维目标的复合电磁散射示意图

为了验证 FDTD 计算复合电磁散射的正确性，图 6.31 分别运用 MOM 和 FDTD 研究了 VV 极化下一维导体单层高斯粗糙面上方半径为 λ，高度 $h=2\lambda$ 导体圆柱的复合散射特性。图中入射频率为 0.3GHz，高斯粗糙面的均方根高度和相关长度分别为 $\delta=0.2\lambda$，$l=1.5\lambda$。从图 6.31 可以看出在不论是 30°入射还是 60°入射，由 FDTD 得到的双站散射系数在整个散射角范围内与 MOM 的结果吻合得较好，这证实了该方法计算一维高斯粗糙面与二维目标复合散射的可行性。

图 6.32 研究了不同极化状态下两层高斯粗糙面($\delta_0=0.2\lambda$，$l_0=1.5\lambda$；$\delta_1=0.1\lambda$，$l_1=1.4\lambda$；$d=2.0\lambda$)与其上方导体、介质圆柱($r=1.0\lambda$，$h=2.0\lambda$)的复合散射系数角分布。上层、下层粗糙面的相对介电常数分别为 $\varepsilon_1=(2.5,0.18)$ 和 $\varepsilon_2=(9.8,1.2)$，介质目标的相对介电常数为 $\varepsilon_3=(4.0,3.0)$。图中入射频率为 1GHz，入射角为 30°。由图可知复合模型的散射系数在远离镜向方向远远大于单纯两层粗糙面的散射系数。另外也可以发现导体圆柱和粗糙面的复合散射在整个散射角范围内大于介质圆柱和粗糙面复合散射的结果。

图 6.33 研究了 HH 极化下两层粗糙面($\delta_0=0.2\lambda$，$l_0=1.5\lambda$；$\delta_1=0.1\lambda$，$l_1=$

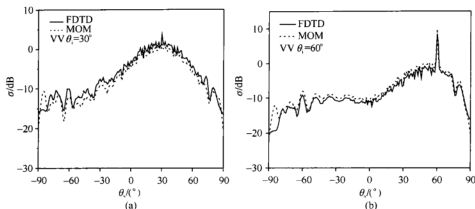


图 6.31　FDTD 方法和 MOM 用于计算一维单层高斯粗糙面及其上方导体圆柱的复合散射系数的结果比较

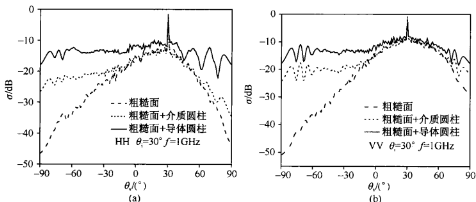


图 6.32　两层粗糙面与其上方导体、介质圆柱复合散射系数角分布

1.4λ；$d=2.0\lambda$)与其上方 $h=5\lambda$ 处导体圆柱的复合散射系数随着圆柱半径的变化关系。图中入射频率为 3GHz，入射角为 30°。由图可知复合散射系数在非相干散射方向随着圆柱半径的增大而增大，特别在大散射方向。这是由于随着圆柱半径的增大，圆柱与粗糙面之间的耦合面积增大，导致耦合散射场增大，所以总的散射系数增大。图 6.34 分析了不同上层的厚度下复合散射系数的变化规律。图中圆柱的半径和高度分别为 $r=1.0\lambda$，$h=2.0\lambda$，相对介电常数为 $\varepsilon_3=(4.0,3.0)$，上层介质的厚度分别为 2λ，6λ，15λ，其他参数与图 6.33 相同。由图 6.34 可知复合散射系数随着上层介质的厚度 d 的变化不明显。

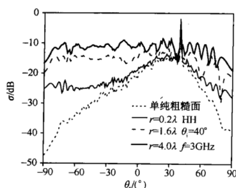


图 6.33 不同圆柱半径下复合散射系数角分布

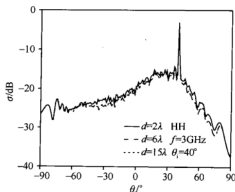


图 6.34 不同上层介质厚度下复合散射系数角分布

6.3.3 FDTD 在二维高斯粗糙面与三维目标复合电磁散射中的应用

3.5.4 小节运用并行 FDTD 研究了单层二维高斯粗糙面的电磁散射特性[10]，4.3.2 小节利用 FDTD 分析了二维分层高斯粗糙面的电磁散射，本节运用该方法研究单层二维高斯粗糙面与其上方三维目标的复合电磁散射特性。下面给出二维粗糙面和三维球目标复合散射的数值结果，粗糙面的尺寸为 $S=25.6\lambda\times25.6\lambda$，入射波为 HH 极化，入射频率为 0.3GHz。

图 6.35 研究了不同入射角下、不同极化方式下二维高斯粗糙面与其上方三维目标的复合电磁散射特性。图中二维高斯粗糙面的均方根高度和相关长度分别为 $\delta=0.06\lambda$ 和 $l_x=l_y=1.0\lambda$，粗糙面的相对介电常数为(3.7,0.13)，导体球的半径和高度为 1.0λ 和 1.5λ。由于目标的尺寸相对于粗糙面的尺寸比较小，因此，复合散射系数角分布与单纯粗糙面散射系数的轮廓类似。另外还可以发现对于 HH 极化，在远离镜向方向复合散射系数比单纯粗糙面的散射系数大得多，而对于 VH 极化而言，复合散射系数在整个散射角范围内都大于单纯粗糙面的结果。

图 6.36 讨论了 0°入射下二维粗糙面与其上方 3λ 位置处导体球的复合散射系数随着球半径 r 的变化关系，图中的其他参数与图 6.35 中的参数相同。图 6.36(a)表示 HH 极化的结果，图 6.36(b)是 VH 极化的结果。由图可知 HH 极化下的复合散射系数在非相干散射方向随着圆柱半径的增大而增大，这主要由于随着球的尺寸的增大，球与粗糙面的耦合面积增大，导致耦合散射增强，因此，总的散射系数增大。而对于 VH 极化而言，复合散射系数在 0°附近随着圆柱半径的增大而增大，而在大散射角方向复合散射系数随着半径的变化不明显。

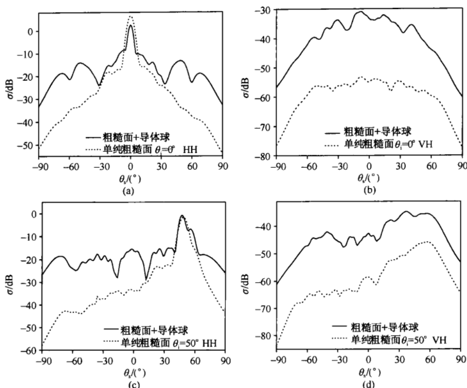


图 6.35　不同入射角、不同极化状态下复合散射系数角分布

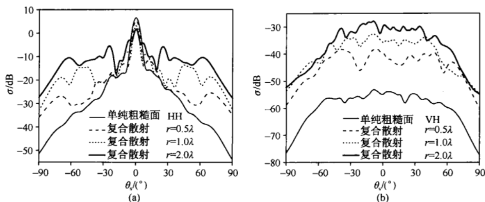


图 6.36　不同球半径下复合散射系数角分布

6.4 双尺度方法在粗糙海面及其与上方泡沫层复合散射中的应用

在求解粗糙面散射问题中，经典的方法有 KA 和 SPM，二者分别适用于表面粗糙度与入射波长相比很大或很小的情况。对于通常的海面而言，海浪的波高一般能达到数英尺，大的波浪上面覆盖着小的风浪和毛细波，即由大尺度的重力波和小尺度的张力波组成，因而海面的散射特性可以用双尺度模型来合理地表述，重力波满足 KA，毛细波满足 SPM。可以用毛细波的 SPM 解来计算散射系数，并将它在大尺度重力波的斜度分布上求平均来反映大尺度波的倾斜效应，即双尺度理论。其详细推导过程可参见 2.5 节。设一平面波入射到如图 6.37 所示的粗糙海面上，其中，海面轮廓用 $f(x,y)$ 表示，设波传播方向与 $\hat{z}$ 成 θ_i 角，与 $\hat{z}'$ 成 θ_i' 角，则根据 2.5 节，水平极化散射系数的定义可根据双尺度理论表示如下：

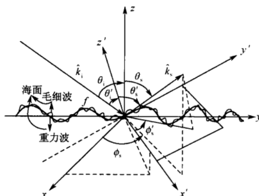


图 6.37 粗糙海面散射示意图

$$\sigma_{HH}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\cot\theta_i}^{\infty}(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^4\sigma_{HH}(\theta_s',\phi_s';\theta_i',\phi_i')P_{\theta_i}(f_x,f_y)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{6.57}$$

$$\sigma_{HH}(\theta_s',\phi_s';\theta_i',\phi_i')=8k^4|\delta|^2\cos^2\theta_s\cos^2\theta_i|\alpha_{HH}|^2W(k_x+k\sin\theta_i,k_y) \tag{6.58}$$

其中，$\theta_s',\theta_i',\phi_s',\phi_i'$代表本地角，$\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{h}}'$分别为主从坐标系中入射波的水平极化分量，$\alpha_{HH}$的具体表达式参见 2.5 节，$W$ 为粗糙面谱密度函数，对于实际海况，采用 Fung 所给的半经验海谱模型[11]，它包括大尺度重力波谱和小尺度张力波谱，因而适用于双尺度模型。$\sigma_{HH}(\theta_s',\phi_s';\theta_i',\phi_i')$可以根据文献[11]获得，$P_{\theta_i}(f_x,f_y)$代表 θ_i 方向观察的大尺度波的斜度概率密度函数。同理，可以得到不同极化情况下的极化系数 α_{VV}，α_{HV} 和 α_{VH}。对于粗糙海面，若从法向观测，则 $P_{\theta_i}(f_x,f_y)=(1+f_x\tan\theta_i)P(f_x,f_y)$，依据 Cox 和 Munk 的海面耀斑统计结果[12]，斜度概率密度函数 $P(f_x,f_y)$可表示为 $P(f_x,f_y)=\dfrac{F(f_x,f_y)}{2\pi\sigma_u\sigma_c}\exp\left(-\dfrac{f_x}{2\sigma_u^2}-\dfrac{f_y}{2\sigma_c^2}\right)$，其中，$F(f_x,f_y)$为峰度函数。根据文献[13]，对于实际非高斯海面，由于风的驱动，使得迎风面坡度减少而背风面坡度增加。为了更好地反映这种差异，需要对峰度函数进行修

正[13]有

$$P(f_x,f_y)=\frac{1}{16\pi\sigma_u\sigma_c}[(2c_{21}-c_{22}-c_{40})\chi_c^2-(c_{22}+c_{04})\chi_u^2+0.167\chi_u^4+0.167\chi_c^4+c_{22}\chi_u^2\chi_c^2+0.667c_{03}\chi_u^3-2(c_{21}+c_{03})\chi_u+(4+c_{22}+0.5c_{40}+0.5c_{04})]e^{-\frac{f_x}{2\sigma_u^2}-\frac{f_y}{2\sigma_c^2}} \tag{6.59}$$

其中，χ_u，χ_c，c_{21}，c_{22}，c_{03}，c_{04}，c_{40}的具体表达式可参见文献[13]。积分下限取$-\cot\theta_i$是为了避免粗糙面的自遮挡效应，在大入射角下，还存在着面元间的互遮挡以及大尺度面元的曲率调制作用，故对双尺度模型进行修正后得到后向散射系数为[13]

$$\sigma_{HH}=s(\nu)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\cot\theta_i}^{\infty}(\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}')^4c_{HH}(\theta_i',k_iR)[\sigma_{HH}(\theta_i',\phi_i')]_{R=\infty}P_\theta(f_x,f_y)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{6.60}$$

其中，$s(\nu)$，$c_{HH}(\theta_i',k_iR)$分别为遮蔽函数和曲率修正因子[13]。

1. 含泡沫双尺度粗糙海面的矢量辐射传输方程

如图 6.38 所示，泡沫层中的矢量辐射传输方程为[14]

$$\cos\theta_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\bar{\boldsymbol{I}}(\theta_s,\phi_s,z)=-\bar{\bar{\boldsymbol{K}}}_e(\theta_s,\phi_s)\bar{\boldsymbol{I}}(\theta_s,\phi_s,z)+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta'\sin\theta_s\times\bar{\bar{\boldsymbol{P}}}(\theta_s,\phi_s;\theta',\phi')\bar{\boldsymbol{I}}(\theta',\phi',z)+\bar{\boldsymbol{Q}}(z,\theta_s,\phi_s) \tag{6.61}$$

$$-\cos\theta_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\bar{\boldsymbol{I}}(\pi-\theta_s,\phi_s,z)=-\bar{\bar{\boldsymbol{K}}}_e(\theta_s,\phi_s)\bar{\boldsymbol{I}}(\pi-\theta_s,\phi_s,z)+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta'\sin\theta_s\times\bar{\bar{\boldsymbol{P}}}(\pi-\theta_s,\phi_s;\theta',\phi')\bar{\boldsymbol{I}}(\theta',\phi',z)+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta'\sin\theta_s\times\bar{\bar{\boldsymbol{P}}}(\pi-\theta_s,\phi_s;\pi-\theta',\phi')\bar{\boldsymbol{I}}(\pi-\theta',\phi',z)+\bar{\boldsymbol{Q}}(z,\theta_s,\phi_s) \tag{6.62}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{I}}(\theta,\phi,z)$为 4×1 柱矢量，它包含缩减强度和漫射强度，$\bar{\bar{\boldsymbol{K}}}_e$为消光矩阵，$\bar{\boldsymbol{Q}}$为海面下方的热发射源，在主动矢量辐射传输理论中，波从上方空气中入射，故$\bar{\boldsymbol{Q}}=0$。$\bar{\bar{\boldsymbol{P}}}(\theta,\phi,\theta',\phi')$为相矩阵，它包括了粒子之间多次散射的耦合关系，由于泡沫粒子的尺寸小于雷达照射波长，故泡沫粒子符合瑞利近似，相矩阵可根据瑞利近似得出。边界条件参见文献[15]，其中，包含体现粒子与界面的耦合作用的反射率矩阵和泡沫层厚d。根据文献[14]，利用常数变易法和边界条件，解出微分积分辐射传输方程，运用迭代法解出各阶解，得到$I^{(0)}(\theta_s,\phi_s,z=d)$，$I^{(1)}(\theta_s,\phi_s,z=d)$，$I^{(0)}(\theta_s,\phi_s,z=0)$和$I^{(1)}(\theta_s,\phi_s,z=0)$。根据文献[14]，含泡沫海面双站散射系数定义为

$$\sigma_{pq}(\theta_s,\phi_s,\theta_i,\phi_i)=\frac{4\pi\cos\theta_s I_p(\theta_s,\phi_s)}{I_q(\theta_i,\phi_i)} \tag{6.63}$$

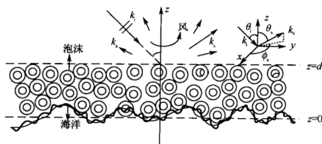


图 6.38　含泡沫双尺度海面

进而得到零阶和一阶散射系数[15]，将零阶、一阶散射场强和入射场强代入式(6.63)从而得到含泡沫海面零阶散射系数 $\sigma_{pq(a)}^{(0)}$ 和一阶散射系数 $\sigma_{pq(b)}^{(1)}$，$\sigma_{pq(c)}^{(1)}$，$\sigma_{pq(d)}^{(1)}$ 及 $\sigma_{pq(e)}^{(1)}$，它们分别表示如下含泡沫海面散射过程：

(1)仅经过粗糙海面的散射时，

$$\sigma_{pq(a)}^{(0)}(\theta_s,\phi_s,\theta_i,\phi_i)=\cos\theta_s\sigma_{pq}\mathrm{e}^{-K_e d\left(\frac{1}{\cos\theta_s}+\frac{1}{\cos\theta_i}\right)} \tag{6.64}$$

(2)仅经过泡沫粒子的散射时，

$$\sigma_{pq(b)}^{(1)}(\theta_s,\phi_s,\theta_i,\phi_i)=\frac{4\pi}{K_e}\cos\theta_s\bar{\bar{P}}_{pq}(\theta_s,\phi_s,\pi-\theta_i,\phi_i)\left(1-\mathrm{e}^{-K_e d\left(\frac{1}{\cos\theta_i}+\frac{1}{\cos\theta_s}\right)}\right) \tag{6.65}$$

(3)先经过泡沫粒子的散射，再经过粗糙海面的散射时，

$$\sigma_{pq(c)}^{(1)}(\theta_s,\phi_s,\theta_i,\phi_i)=\frac{4\pi}{K_e}\cos\theta_s\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta'\sin\theta'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\sum_{l=\mathrm{V,H}}\bar{\bar{P}}_{pl}(\theta_s,\phi_s;\theta',\phi')$$
$$\times\bar{\bar{R}}_{lq}(\theta',\phi';\pi-\theta_i,\phi_i)\frac{\cos\theta'}{\cos\theta_s-\cos\theta'}\mathrm{e}^{-K_e d\left(\frac{1}{\cos\theta'}-\frac{1}{\cos\theta_s}\right)} \tag{6.66}$$

(4)先经过粗糙海面的散射，再经过泡沫粒子的散射时，

$$\sigma_{pq(d)}^{(1)}(\theta_s,\phi_s,\theta_i,\phi_i)=\frac{4\pi}{K_e}\cos\theta_s\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta'\sin\theta'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\sum_{m=\mathrm{V,H}}\bar{\bar{R}}_{pm}(\theta_s,\phi_s;\pi-\theta',\phi')$$
$$\times\bar{\bar{P}}_{mq}(\pi-\theta',\phi';\pi-\theta_i,\phi_i)\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_i-\cos\theta'}\mathrm{e}^{-K_e d\left(\frac{1}{\cos\theta'}-\frac{1}{\cos\theta_i}\right)} \tag{6.67}$$

(5)先经过粗糙海面的散射，然后受到泡沫粒子的散射，再经粗糙海面散射时，

$$\sigma_{pq(e)}^{(1)}(\theta_s,\phi_s,\theta_i,\phi_i)=\frac{4\pi}{K_e}\cos\theta_s\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta'\sin\theta'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\sum_{l=\mathrm{V,H}}\bar{\bar{R}}_{pl}(\theta_s,\phi_s;\pi-\theta',\phi')$$
$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta''\sin\theta''\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi''\sum_{m=\mathrm{V,H}}\bar{\bar{P}}_{lm}(\pi-\theta',\phi';\theta'',\phi'')$$
$$\times\bar{\bar{R}}_{mq}(\theta'',\phi'';\theta_i,\phi_i)\frac{\cos\theta''}{\cos\theta'+\cos\theta''}$$

$$(1 - e^{-K_e d\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)}) e^{-K_e d\left(\frac{1}{\cos\theta_i} + \frac{1}{\cos\theta_s}\right)} \tag{6.68}$$

综合上述各过程，可以得到泡沫覆盖区域的海面散射系数，其中，K_e 为消光系数，σ_{pq} 为采用修正双尺度方法计算的无泡沫时的海面散射系数。

2. 泡沫的消光系数、散射系数和覆盖率

由于本节中将水气泡和水粒子分别视为空心分层球粒子和实心球粒子来比较，故对它们的研究需从球形粒子电磁散射着手。分层球形粒子的电磁散射可以运用近似 Mie 理论来分析。根据相关文献，对于实心粒子，Mie 散射 T 矩阵系数可写为

$$T_n^{(M)} = -\frac{j_n(k_s a)[kaj_n(ka)]' - j_n(ka)[k_s aj_n(k_s a)]'}{j_n(k_s a)[kah_n(ka)]' - h_n(ka)[k_s aj_n(k_s a)]'} \tag{6.69}$$

$$T_n^{(N)} = -\frac{[k_s^2 a^2 j_n(k_s a)][kaj_n(ka)]' - [k^2 a^2 j_n(ka)][k_s aj_n(k_s a)]'}{[k_s^2 a^2 j_n(k_s a)][kah_n(ka)]' - [k^2 a^2 h_n(ka)][k_s aj_n(k_s a)]'} \tag{6.70}$$

其中，a 为粒子半径，j_n 和 h_n 分别是球贝塞尔函数和球汉克尔函数。

对于图 6.39 所示的球形空心粒子，根据文献[15]，T 矩阵系数可写为

$$T_n^{(M)} = -\frac{[\delta_0 j_n(\delta)]'[j_n(\zeta) + B_n(\zeta,\chi)y_n(\zeta)] - \left\{[\zeta j_n(\zeta)]' + B_n(\zeta,\chi)[\zeta y_n(\zeta)]'\right\} j_n(\delta_0)}{[\delta_0 h_n(\delta)]'[j_n(\zeta) + B_n(\zeta,\chi)y_n(\zeta)] - \left\{[\zeta j_n(\zeta)]' + B_n(\zeta,\chi)[\zeta y_n(\zeta)]'\right\} h_n(\delta_0)} \tag{6.71}$$

$$T_n^{(N)} = -\frac{[\delta_0 j_n(\delta)]'\zeta[j_n(\zeta) + A_n(\zeta,\chi)y_n(\zeta)] - \left\{[\zeta j_n(\zeta)]' + A_n(\zeta,\chi)[\zeta y_n(\zeta)]'\right\} \delta_0^2 j_n(\delta_0)}{[\delta_0 h_n(\delta)]'\zeta^2[j_n(\zeta) + B_n(\zeta,\chi)y_n(\zeta)] - \left\{[\zeta j_n(\zeta)]' + B_n(\zeta,\chi)[\zeta y_n(\zeta)]'\right\} h_n(\delta_0)} \tag{6.72}$$

其中，y_n 为球诺伊曼函数，$\delta_0 = ka$ 代表粒子尺寸参数，$\zeta = k_a a$，$\zeta = k_b b$，$\chi = k_b a$，b，a 分别为粒子的内、外半径，k_b，k_a 分别为壳、核波数，散射截面和消光截面分别写为

$$Q_{sca} = \frac{2}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\left(|-T_n^{(N)}|^2 + |-T_n^{(M)}|^2\right) \tag{6.73}$$

$$Q_{ext} = \frac{2}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\mathrm{Re}\left(-T_n^{(N)} - T_n^{(M)}\right) \tag{6.74}$$

实际海面泡沫是由多个球形水泡粒子组成，计算其散射系数时需考虑海面泡沫的分布。海面泡沫的尺寸分布通常界于 μm～mm 量级，关于泡沫的尺寸参数以及单位体积的泡沫数 N_0 参见文献[15]。结合前述消光截面和散射截面，可以获得泡沫的消光系数 K_e 和散射系数[15]。由于海面泡沫覆盖率不仅依赖于风速，还依赖于风区和改变泡沫生存期的因子，如水温、低层大气的热稳定性等，不同的统计模型给出了不同的结果。根据相关文献，当气-海温差适中、大气稳定时，泡沫覆

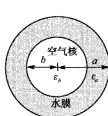


图 6.39　泡沫微结构

盖率为

$$C = 2.32 \times 10^{-6} \times U_{10}^{3.4988} \tag{6.75}$$

当气-海温差大于 2℃小于 12℃，即大气处于非稳态时，泡沫覆盖率为

$$C = 0.43 \times 10^{-6} \times U_{10}^{3.6824} \tag{6.76}$$

既包含风速又包含气-海温差 ΔT 时，泡沫覆盖率为

$$C = 1.95 \times 10^{-5} U_{10}^{2.55} \exp(0.0861\Delta T) \tag{6.77}$$

此时，考虑了泡沫覆盖率的风驱海面的总散射系数可以表示为

$$\sigma_{pq总} = (1-C)\sigma_{pq} + C(\sigma_{pq(a)}^{(0)} + \sigma_{pq(b)}^{(1)} + \sigma_{pq(c)}^{(1)} + \sigma_{pq(d)}^{(1)} + \sigma_{pq(e)}^{(1)}) \tag{6.78}$$

3. 数值计算及结果分析

首先讨论泡沫粒子为空气泡和实心水粒子时的散射特性的差异，然后研究粗糙海面上有无泡沫覆盖时散射系数与各参量的关系，并与文献测量值进行比较。

图 6.40 给出了同种单个空心粒子的散射截面随 ka 的变化，其中，单个实心粒子的相对介电常数为(12.83，2.59)，内外半径比 b/a 分别为 0.2，0.4 和 0.6。可以看出实心粒子与空心粒子的散射特性是有差异的，b/a 为 0.6 的空心粒子的散射截面与实心粒子的差异最大，0.4 时差异变小，0.2 时差异最小，说明内部空气核所占体积越大，空心粒子的散射特性与实心粒子差异越大，而内部空气越少，则空心粒子的散射特性与实心粒子越接近。

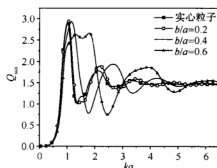


图 6.40　单个空心、实心粒子散射截面随 ka 的变化

图 6.41(a)和(b)分别给出了水气泡与水粒子的水平和垂直散射强度角分布，可以看出当空气核的半径比较小时，水气泡的散射强度与实心水粒子的散射强度接近，当空气核的半径增加，即气泡变薄时，水气泡的散射强度与水粒子的散射强度差距变大，说明了水气泡的散射与水粒子的散射是不同的。因此，在研究海面的泡沫散射时，将泡沫视为水粒子与水气泡时所得的结果是有差异的。根据 Monahan 等的结论[16]可知海面泡沫主要是由水气泡组成，所以本节中将泡沫视为水气泡来研究，以便更好地符合实际海面。

在文献[15]中，通过对式(6.77)进行数值模拟可以得到海洋泡沫覆盖率随 10m 高处风速和海-气温差(ΔT)的变化关系。可知当风速越大，海水较其上方附近的空气温度越高，泡沫覆盖率越大，风速不变，ΔT 越大，泡沫覆盖率越大；ΔT 不变，风速越大，泡沫覆盖率越大。本节只讨论当海面上方附近的空气为中性情形

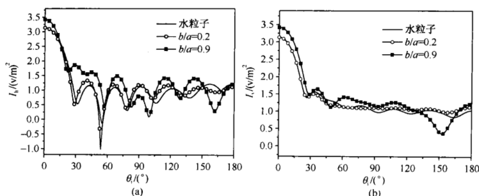


图 6.41　水气泡与水粒子水平散射强度和垂直散射强度的角分布

(大气稳定、海-气温差不明显)，故采用式(6.75)的泡沫覆盖率。

图 6.42 和图 6.43 针对满足非相干假设的近高斯型粗糙海面模型，图 6.42 给出了未考虑泡沫时的单双尺度、考虑泡沫时的双尺度近高斯粗糙海面后向散射系数随入射角的变化，并与文献[17]中的测量值进行了比较。入射频率取为 8.93GHz，参量 $m,k\delta,kl$ 的选取是依据文献[18]在风速为 14～16 节下将高斯谱近似为实际海谱拟合所得(m 为均方根斜度，δ 为均方根高度，l 为相关长度)，海水温度 20℃，盐度 36‰，相对介电常数 $\varepsilon_{\text{Debye}}$是由 Debye 公式算出为(46.236,39.149)。可以看出单尺度模型仅适用于小入射角，在中等入射角区域，双尺度模型一定程度上修正了单独考虑大尺度时的不足，在大入射角区域，考虑了泡沫的双尺度模型比单独考虑双尺度模型更接近于实验数据。故双尺度模型理论值与实验值有一定差距，而考虑了泡沫的影响后更接近了实际情况。图 6.43 所示为双站散射系数随方位角的变化。可以看出对于 HH 极化，前向和后向观测时，泡沫的影响较大且较侧向观测时显著；对于 HV 极化，泡沫的影响在侧向附近区域观测时较前后向观测明显。

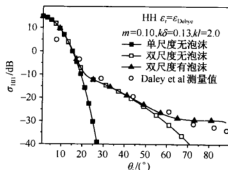


图 6.42　后向散射系数随入射角的变化

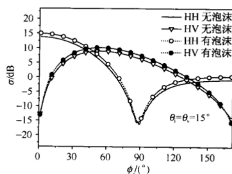


图 6.43　双站散射系数随方位角的变化

图 6.44～图 6.47 针对 Fung 半经验谱二维海面给出了海面后向散射系数的变化特征。入射频率取为 13.9GHz。图 6.44 和图 6.45 分别是入射角为 30°,40°,48°时,HH,VV 极化,顺风情形下,有、无泡沫时后向散射系数随风速的变化以及与相关文献测量值的比较。图中虚线为单独双尺度海面的结果,实线包含了泡沫的影响。可以看出考虑了泡沫影响的计算值更接近于测量值,同时随着入射角的增大,泡沫的作用变得明显,HH 极化时泡沫的影响大于 VV 极化情形。

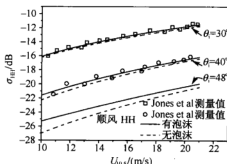


图 6.44　HH 极化时后向散射系数随风速的变化

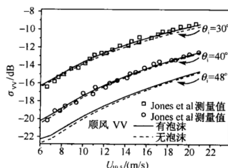


图 6.45　VV 极化时后向散射系数随风速的变化

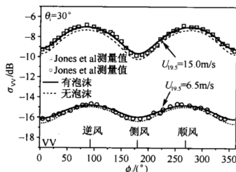


图 6.46　后向散射系数随方位角的变化

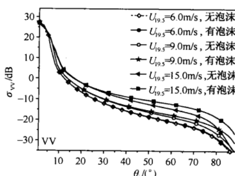


图 6.47　不同风速下后向散射系数随入射角的变化

图 6.46 为 VV 极化下有、无泡沫时后向散射系数随方位角(相对于侧风向)的变化以及与相关文献测量值的比较。不难看出当风速为 6.5m/s 时,由于泡沫不多,泡沫的作用不太显著;当风速为 15.0m/s 时,泡沫增多,泡沫开始产生一定的影响,故考虑泡沫影响后的计算值更接近于文献测量值。同时,可以看出平行于风向(顺风、逆风)观测得到的后向散射系数较垂直于风向(侧风)观测的结果差异最显著,主要是由于平行于风向的大尺度波上的毛细波与侧风向上的毛细波粗糙度差异最明显,风速为 15.0m/s 时的顺风-侧风后向散射系数的差异比风速为

6.5m/s 时明显，这是由风速增大时，在平行于风向与侧风向上，大尺度重力波、小尺度毛细波的差异均增大所造成的。

图 6.47 给出了风速分别为 6.0m/s，9.0m/s，15.0m/s 时，VV 极化下，有、无泡沫情形时后向散射系数随入射角的变化。可以看出对于相同的入射角，随着风速的增大海面后向散射系数是增大的，这主要是风速越大海面越粗糙造成非相干散射越强所引起的。同时，风速为 6.0m/s 时，有、无泡沫时的曲线差异最小，9.0m/s 时差异变大，15.0m/s 时的差异最大，是由于风速越大，泡沫越多，其覆盖率也越大，泡沫的体散射对后向散射系数的影响因而也就越显著。

6.5 互易性定理在粗糙海面与目标复合电磁散射中的应用

6.5.1 互易性定理用于求解粗糙海面与其上方平板目标的复合电磁散射

首先结合表面等效电磁流定理，给出互易性定理在求解两相邻目标复合电磁散射中的应用，以便将其推广至粗糙海面与目标的复合电磁散射的计算中。众所周知，在研究目标散射场时，可应用面等效电流源和(或)磁流源来求解目标的外部散射场，这可以降低求解问题的难度。面电流源 $\boldsymbol{J}_s$ 和面磁流源 $\boldsymbol{M}_s$ 都是由切向电磁场的不连续性产生的，分别定义为

$$\boldsymbol{J}_s = \hat{\boldsymbol{n}} \times \delta \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{M}_s = -\hat{\boldsymbol{n}} \times \delta \boldsymbol{E} \tag{6.79}$$

假设在空间中有两个相互靠近的目标(图 6.48(a))。设平面波 $\boldsymbol{E}_1^{\text{i}}, \boldsymbol{H}_1^{\text{i}}$ 入射到目标 1 和目标 2 上，考虑第一种情况，当介质目标 2 不存在时，入射电磁场在目标 1 的表面上产生的等效面电流密度和面磁流密度分别记为 $\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{M}_1$，此时，由 $\boldsymbol{J}_1$ 在空间中激发的电磁场及目标 2 对 $\boldsymbol{J}_1$ 的散射场之和记为 $\boldsymbol{E}_{J1}, \boldsymbol{H}_{J1}$；由 $\boldsymbol{M}_1$ 在空间中激发的电磁场及目标 2 对 $\boldsymbol{M}_1$ 的散射场之和记为 $\boldsymbol{E}_{M1}, \boldsymbol{H}_{M1}$。

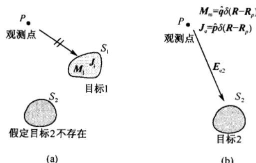


图 6.48 两个目标复合电磁散射示意图

第二种情况，去掉入射波在介质目标 1 上的等效面电流和等效面磁流，只是保留目标 2(图 6.48(b))，在远区观察点 P 处有单位点电流源 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}=\hat{\boldsymbol{p}}\,\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0)$ 和单位点磁流源 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}=\hat{\boldsymbol{q}}\,\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0)$，单位点电流源和磁流源的极化方向 $\hat{\boldsymbol{p}}$ ($\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}}$ 或 $\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}}$) 和 $\hat{\boldsymbol{q}}$ ($\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}}$ 或 $\hat{\boldsymbol{h}}_{\mathrm{s}}$) 满足条件 $\hat{\boldsymbol{q}}=\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\times\hat{\boldsymbol{p}}$。由于单位点电流源 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}$ 的存在，空间中激发的电场和磁场分别记为 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}22}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}22}$。同理，单位点磁流源 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}$ 在空间中激发的电场和磁场分别为 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}22}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}22}$，其中，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}22}$，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}22}$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}22}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}22}$ 都是既包括源的一次散射场，同时也包括目标 2 对一次散射场的二次散射场。这样应用互易性定理公式可得[19]

$$\begin{aligned}&\int_{S_1}\boldsymbol{J}_1\cdot(\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}22}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}22})-\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}\cdot(\boldsymbol{E}_{J1}+\boldsymbol{E}_{M1})+\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}\cdot(\boldsymbol{H}_{J1}+\boldsymbol{H}_{M1})\\&-\boldsymbol{M}_1\cdot(\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}22}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}22})\mathrm{d}S=\oint_{S_\infty+S_2}[(\boldsymbol{E}_{J1}+\boldsymbol{E}_{M1})\times(\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}22}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}22})\\&\qquad-(\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}22}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}22})\times(\boldsymbol{H}_{J1}+\boldsymbol{H}_{M1})]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned}\tag{6.80}$$

其中，S_∞ 代表无限远闭合球面。因为在无限远处电磁场存在关系 $(\boldsymbol{E}_{J1}+\boldsymbol{E}_{M1})=-Z_0\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_{J1}+\boldsymbol{H}_{M1})$ 及 $(\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}22}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}22})=-Z_0\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}22}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}22})$，所以式(6.80)中关于 S_∞ 和 S_2 的积分为零，Z_0 为自由空间的波阻抗。这样，式(6.80)可写为

$$\begin{aligned}&\int_{S_1}\boldsymbol{J}_1\cdot(\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}22}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}22})-\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}\cdot(\boldsymbol{E}_{J1}+\boldsymbol{E}_{M1})+\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}\cdot(\boldsymbol{H}_{J1}+\boldsymbol{H}_{M1})\\&\qquad-\boldsymbol{M}_1\cdot(\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}22}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}22})\mathrm{d}S=0\end{aligned}\tag{6.81}$$

对于两理想导体目标，注意到 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}$ 是单位点源且磁流为 0，由式(6.81)可得

$$\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{E}_{J1}=\int_{S_1}\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}22}\mathrm{d}S\tag{6.82}$$

对于两理想导磁体目标，注意到 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}$ 是单位点源且电流为 0，由式(6.81)可得

$$\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{H}_{M1}=\int_{S_1}\boldsymbol{M}_1\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}22}\mathrm{d}S\tag{6.83}$$

对于两介质目标，注意到 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}$ 和 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}$ 是单位点源，由式(6.82)、式(6.83)和式(6.81)可得

$$\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{E}_{J1}=\int_{S_1}\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}22}\mathrm{d}S\tag{6.84}$$

$$\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{H}_{M1}=\int_{S_1}\boldsymbol{M}_1\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}22}\mathrm{d}S\tag{6.85}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{E}_{M1}-\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{H}_{J1}=\int_{S_1}\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}22}-\boldsymbol{M}_1\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}22}\mathrm{d}S\tag{6.86}$$

同理，可求得

$$\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{E}_{J2}=\int_{S_2}\boldsymbol{J}_2\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}11}\mathrm{d}S\tag{6.87}$$

$$\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{H}_{M2}=\int_{S_2}\boldsymbol{M}_2\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}11}\mathrm{d}S\tag{6.88}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{E}_{M2} - \hat{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{H}_{J2} = \int_{S_2} \boldsymbol{J}_2 \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{m11}} - \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{H}_{\mathrm{e11}} \mathrm{d}S \tag{6.89}$$

根据两相邻目标的材料特性，可分为下列 9 种情况进行求解：

(1)当研究两个理想导体目标的复合电磁散射问题时，可应用式(6.84)和式(6.87)求得散射场为 $\boldsymbol{E}_{J1}+\boldsymbol{E}_{J2}$；

(2)当研究两个理想导磁体目标的复合电磁散射问题时，可应用式(6.85)和式(6.88)求得散射场为 $\boldsymbol{E}_{M1}+\boldsymbol{E}_{M2}$；

(3)当目标 1 为理想导体而目标 2 为理想导磁体时，可应用式(6.84)和式(6.88)求得散射场为 $\boldsymbol{E}_{J1}+\boldsymbol{E}_{M2}$；

(4)当目标 1 为理想导磁体而目标 2 为理想导体时，可应用式(6.85)和式(6.87)求得散射场为 $\boldsymbol{E}_{M1}+\boldsymbol{E}_{J2}$；

(5)当目标 1 为理想导体而目标 2 为介质目标时，可应用式(6.84)、式(6.87)和式(6.88)求得散射场为 $\boldsymbol{E}_{J1}+\boldsymbol{E}_{M2}+\boldsymbol{E}_{J2}$；

(6)当目标 1 为介质目标 2 为理想导体时，可应用式(6.84)、式(6.85)和式(6.87)求得散射场为 $\boldsymbol{E}_{J1}+\boldsymbol{E}_{M1}+\boldsymbol{E}_{J2}$；

(7)当目标 1 为理想导磁体而目标 2 为介质时，可应用式(6.85)、式(6.87)和式(6.88)求得散射场为 $\boldsymbol{E}_{M1}+\boldsymbol{E}_{M2}+\boldsymbol{E}_{J2}$；

(8)当目标 1 为介质目标 2 为理想导磁体时，可应用式(6.84)、式(6.85)和式(6.88)求得散射场为 $\boldsymbol{E}_{J1}+\boldsymbol{E}_{M1}+\boldsymbol{E}_{M2}$；

(9)当研究两个介质目标的复合电磁散射问题时，可应用式(6.84)、式(6.85)、式(6.87)和式(6.88)求得散射场为 $\boldsymbol{E}_{J1}+\boldsymbol{E}_{M1}+\boldsymbol{E}_{J2}+\boldsymbol{E}_{M2}$，其中，$\boldsymbol{E}_{M1}=-Z_0\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\times\boldsymbol{H}_{M1}$，$\boldsymbol{E}_{M2}=-Z_0\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{s}}\times\boldsymbol{H}_{M2}$。

上面应用等效原理和互易性定理推导了两个邻近目标复合电磁散射场的求解公式，当目标均为理想导体时，所得式(6.84)和式(6.87)与文献[20]中的式(2)和式(3)是一致的。

本节在此工作基础上，将互易性定理引入到介质粗糙海面与其上方导体平板的复合电磁散射中。在忽略三次散射场的前提下，应用 KA 求解了时变介质海面的后向散射场，应用物理光学法求解了海面表面电磁流及上方导体平板的电磁散射场，同时结合互易性定理给出了求解目标与海面之间二次耦合散射场的公式，研究了时变介质海面与其上方运动平板的复合电磁散射特性，并对复合电磁散射场的多普勒特性进行了分析。

下面将介质海面记为目标 1，将其上方导体平板记为目标 2，根据前面的分析可知目标 1 对入射波的一次散射场及目标 2 对目标 1 一次散射场的二次散射场可以应用下面的公式求解：

$$\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{E}_{J1} = \int_S \boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_{e22} \mathrm{d}s \tag{6.90a}$$

$$\hat{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{H}_{M1} = \int_S \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{H}_{m22} \mathrm{d}s \tag{6.90b}$$

因为 $\boldsymbol{E}_{e22}$ 和 $\boldsymbol{H}_{m22}$ 都是由两部分组成，因此式(6.90a)和式(6.90b)的右边均可以分解成两部分，即

$$\int_S \boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_{e22} \mathrm{d}s = \int_S \boldsymbol{J}_1 \cdot (\boldsymbol{E}_{ed} + \boldsymbol{E}_{e2c}) \mathrm{d}s = \int_S \boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_{ed} \mathrm{d}s + \int_S \boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_{e2c} \mathrm{d}s \tag{6.91a}$$

$$\int_S \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{H}_{m22} \mathrm{d}s = \int_S \boldsymbol{M}_1 \cdot (\boldsymbol{H}_{md} + \boldsymbol{H}_{m2c}) \mathrm{d}s = \int_S \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{H}_{md} \mathrm{d}s + \int_S \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{H}_{m2c} \mathrm{d}s \tag{6.91b}$$

其中，$\boldsymbol{E}_{ed}$ 为直接由单位线电流源激发的电场，同样，$\boldsymbol{H}_{md}$ 为直接由单位线磁流源激发的磁场，$\boldsymbol{E}_{e2c}$ 和 $\boldsymbol{H}_{m2c}$ 为 $\boldsymbol{E}_{ed}$ 和 $\boldsymbol{H}_{md}$ 入射到目标 2 产生的散射场。同时，式(6.90a)和式(6.90b)的左边也均可以分解为

$$\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{E}_{J1} = \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{E}^s_{J1d} + \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{E}^s_{J12c} \tag{6.92a}$$

$$\hat{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{H}_{M1} = \hat{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{H}^s_{M1d} + \hat{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{H}^s_{M12c} \tag{6.92b}$$

其中，$\boldsymbol{E}^s_{J1d}$ 及 $\boldsymbol{H}^s_{M1d}$ 是目标 1 上的一次散射场，而 $\boldsymbol{E}^s_{J12c}$，$\boldsymbol{H}^s_{M12c}$ 是目标 2 对目标 1 一次散射场的二次散射场，则可以得到

$$\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{E}^s_{J12c} = \int_S \boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_{e2c} \mathrm{d}s \tag{6.93a}$$

$$\hat{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{H}^s_{M12c} = \int_S \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{H}_{m2c} \mathrm{d}s \tag{6.93b}$$

对于介质海面与上方平板的复合散射而言，$\boldsymbol{E}^s_{J12c}$ 和 $\boldsymbol{H}^s_{M12c}$ 即是它们之间的二次耦合散射场，$\boldsymbol{J}_1$ 及 $\boldsymbol{M}_1$ 则是入射波在介质海面激发的电磁流，而 $\boldsymbol{E}_{e2c}$ 和 $\boldsymbol{H}_{m2c}$ 分别是平板对单位点电、磁流源所激发电磁场的一次散射场。首先应用 KA 及物理光学法分别求解介质海面的后向散射场及表面电磁流($\boldsymbol{J}_1$ 及 $\boldsymbol{M}_1$)，然后应用物理光学法求解了导体平板的散射场($\boldsymbol{E}_{e2c}$ 和 $\boldsymbol{H}_{m2c}$)，随后利用互易性定理求解了介质海面与平板之间二次耦合散射场($\boldsymbol{E}^s_{J12c}$ 和 $\boldsymbol{H}^s_{M12c}$)，最后给出总散射场的求解及多普勒谱分析。需要指出的是，后面所涉及场的具体表示符号(角标)会有所不同，请读者注意。

1. 时变介质海面的 KA 解及表面电、磁流的求解

在 t 时刻，假设风向和基本坐标系 x 轴重合(模拟二维介质海面轮廓时假定粗糙面轮廓只随 x 方向变化，随 y 方向不变)，应用最为常见的 PM 谱作为海面模型的表面轮廓谱，这样时变海面表面轮廓 $f(x,t)$ 及其导数 $f'_x(x,t)$ 就可以应用下式进行模拟：

$$\begin{cases} f(x,t) = \sum_{m=0}^{N} A_m \cos(K_m x - \omega_m t + \Phi_m) \\ f'_x(x,t) = -\sum_{m=0}^{N} A_m K_m \sin(K_m x - \omega_m t + \Phi_m) \end{cases} \tag{6.94}$$

其中，$A_m = \sqrt{2W(K_m)\Delta K_m}$，$\omega_m = \sqrt{g_c K_m}$。考虑具有单位幅度的平面电磁波入射到由式(6.94)所描述的海面上，照射范围从 $x=-L_f$ 到 $x=L_f$，在 KA 条件下可以得到散射电场为[21]

$$E^s(r,t) = \frac{ik\exp(ikr)}{4\pi r}\int_{-L_f}^{L_f}(pf'_x(x,t)-q)\exp\{i[v_x x + v_z f(x,t)]\}dx \tag{6.95}$$

其中，

$$p = (1-R)\sin\theta_i + (1+R)\sin\theta_s \tag{6.96a}$$

$$q = (1+R)\cos\theta_s - (1-R)\cos\theta_i \tag{6.96b}$$

$$v_x = k(\sin\theta_i - \sin\theta_s) \tag{6.97a}$$

$$v_z = -k(\cos\theta_i + \cos\theta_s) \tag{6.97b}$$

θ_i 和 θ_s 分别为入射角和散射角，R 为 Fresnel 反射系数。对于后向散射，$\theta_s = -\theta_i$。当粗糙面满足 KA 条件时，粗糙面也近似满足物理光学条件，这样就可以应用物理光学近似求解粗糙海面的表面电流。当入射波为水平极化波(HH)，海面的表面等效电流和磁流分别为

$$\boldsymbol{J}_{\text{rte}} = (1-R_{\text{HH}})\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_i,\quad \boldsymbol{M}_{\text{rte}} = -(1+R_{\text{HH}})\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_i \tag{6.98}$$

当入射波为垂直极化波(VV)时，海面的表面等效电流和磁流分别为

$$\boldsymbol{J}_{\text{rtm}} = (1+R_{\text{VV}})\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_i,\quad \boldsymbol{M}_{\text{rtm}} = -(1-R_{\text{VV}})\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_i \tag{6.99}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是海表面指向自由空间的单位表面法向矢量。

当入射波为 HH 极化波，设入射波为 $\boldsymbol{E}_i = \hat{\boldsymbol{y}}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$，应用物理光学法可以求得海面的表面电流和磁流为

$$\boldsymbol{J}_{\text{rte}} = (1-R_{\text{HH}})\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_i = (1-R_{\text{HH}})\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{(\cos\theta_i + f'_x\sin\theta_i)}{\sqrt{1+f'^2_x}} \times \exp(ikx\sin\theta_i - ikf\cos\theta_i)\hat{\boldsymbol{y}} \tag{6.100}$$

$$\boldsymbol{M}_{\text{rte}} = -(1+R_{\text{HH}})\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_i = (1+R_{\text{HH}})\frac{\hat{\boldsymbol{x}} + f'_x\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{1+f'^2_x}}\exp(ikx\sin\theta_i - ikf\cos\theta_i) \tag{6.101}$$

根据惠更斯原理，将式(6.100)和式(6.101)代入惠更斯原理公式[19]

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_S [i\omega\mu\bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J} - \nabla\times\bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{M}]ds \tag{6.102}$$

化简可求得介质海面的远区散射场结果和式(6.95)结果是一致的，从而证明了应用式(6.100)和式(6.101)求解表面等效电磁流的合理性。当入射波为 VV 极化波

时，入射场可以写为

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{y}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{6.103}$$

应用式(6.99)可以得到海面的等效表面电流、磁流分别为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{rtm}} = (1+R_{\mathrm{VV}})\,\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} = -(1+R_{\mathrm{VV}})\frac{\hat{\boldsymbol{x}}+f'_x\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{1+f'^2_x}}\exp(\mathrm{i}k\sin\theta_{\mathrm{i}}-\mathrm{i}kf\cos\theta_{\mathrm{i}}) \tag{6.104}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{rtm}} = -(1-R_{\mathrm{VV}})\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} = (1-R_{\mathrm{VV}})\frac{\cos\theta_{\mathrm{i}}+f'\sin\theta_{\mathrm{i}}}{\sqrt{1+f'^2_x}}\times\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_{\mathrm{i}}-\mathrm{i}kf\cos\theta_{\mathrm{i}})\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{6.105}$$

将式(6.104)和式(6.105)代入惠更斯原理公式同样也可以得到与式(6.95)一致的结果。

2. 平板散射场的求解

图 6.49 为一倾斜导体平板和介质海面的复合散射模型示意图，板的中心位置为$(x_0,0,z_0)$，平板法线方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 与笛卡儿坐标轴 z'轴负半轴的夹角为 α，边长为 $L\times W$，在基本坐标系中入射波的入射角为 θ_{i}，相对于平板坐标系的入射角为 θ'_{i}，z_0 为平板中心到粗糙面的高度，β 为相对于平板的镜反射而言两侧的张角，它的大小决定了求解耦合散射场时积分区域的大小。设入射波 HH 极化波，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{y}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$照射到粗糙海面及平板上，易知平板的单位法矢 $\hat{\boldsymbol{n}}=(-\sin\alpha,0,-\cos\alpha)$。

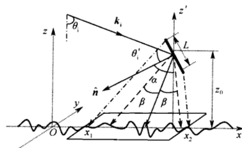


图 6.49 平板与粗糙面复合散射几何模型

这样根据空间几何的知识求得当 $\alpha\neq\pi/2$ 时，平板所在平面的平面方程为

$$z = z_0 - \tan\alpha(x-x_0) \tag{6.106}$$

当 $\alpha=\pi/2$ 时有

$$x = x_0 \tag{6.107}$$

设平板中心的坐标为

$$\begin{cases} x_0 = x_{00} + Vt\sin\Theta\cos\Phi \\ y_0 = y_{00} + Vt\sin\Theta\sin\Phi \\ z_0 = z_{00} + Vt\cos\Theta \end{cases} \tag{6.108}$$

其中，V 为平板的运动速度，Φ 和 Θ 分别为平板运动速度和 x，y 轴的夹角，当 $\alpha\neq\pi/2$ 时，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$ 在平板上激发的表面电流在物理光学近似下为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_{\mathrm{p}} = 2\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} &= -2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos(\theta_{\mathrm{i}}+\alpha)\exp(\mathrm{i}kx'\sin\theta_{\mathrm{i}} - \mathrm{i}kz'\cos\theta_{\mathrm{i}})\,\hat{\boldsymbol{y}} \\ &= -2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos(\theta_{\mathrm{i}}+\alpha)\exp[\mathrm{i}k(\sin\theta_{\mathrm{i}}+\cos\theta_{\mathrm{i}}\tan\alpha)x' \\ &\quad - \mathrm{i}k(z_0\cos\theta_{\mathrm{i}} + x_0\cos\theta_{\mathrm{i}}\tan\alpha)]\,\hat{\boldsymbol{y}}\end{aligned} \tag{6.109}$$

当 $\alpha=\pi/2$ 时有

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{p}} = 2\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} = -2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos(\theta_{\mathrm{i}}+\alpha)\exp(\mathrm{i}kx_0\sin\theta_{\mathrm{i}} - \mathrm{i}kz'\cos\theta_{\mathrm{i}})\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{6.110}$$

其中，x'，z'在平板表面上。应用 Stratton-Chu 公式，在远场近似条件下可以求得平板的散射场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{s}} &= \mathrm{i}\omega\mu(\bar{\bar{\boldsymbol{I}}} - \hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}})\iint_{S_{\mathrm{p}}}\frac{\exp(\mathrm{i}k\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}\mathrm{d}s' \\ &= -\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega\cos(\alpha+\theta_{\mathrm{i}})\exp(\mathrm{i}kr)\exp[-\mathrm{i}k(\cos\theta_{\mathrm{i}}+\cos\theta_{\mathrm{s}})(z_0+\tan\alpha x_0)]W \\ &\quad \times \exp\{\mathrm{i}k[(\sin\theta_{\mathrm{i}}-\sin\theta_{\mathrm{s}})+(\cos\theta_{\mathrm{i}}+\cos\theta_{\mathrm{s}})\tan\alpha]x_0\}(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta_{\mathrm{s}}\sin\varphi_{\mathrm{s}}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi_{\mathrm{s}}) \\ &\quad \times \sin\left[(k\sin\theta_{\mathrm{i}}+k\cos\theta_{\mathrm{i}}\tan\alpha - k\sin\theta_{\mathrm{s}}+k\cos\theta_{\mathrm{s}}\tan\alpha)\cos\alpha\,\frac{L}{2}\right] \\ &\quad /[\pi r\cos\alpha(k\sin\theta_{\mathrm{i}}+k\cos\theta_{\mathrm{i}}\tan\alpha - k\sin\theta_{\mathrm{s}}+k\cos\theta_{\mathrm{s}}\tan\alpha)]\end{aligned} \tag{6.111}$$

当 $\alpha\neq\pi/2$ 时，在 xOz 平面内研究散射场的散射特性时有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{s}} &= -\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega\cos(\alpha+\theta_{\mathrm{i}})\exp(\mathrm{i}kr)\,\hat{\boldsymbol{y}}\exp[-\mathrm{i}k(\cos\theta_{\mathrm{i}}+\cos\theta_{\mathrm{s}})(z_0+\tan\alpha x_0)]W \\ &\quad \times \exp\{\mathrm{i}k[(\sin\theta_{\mathrm{i}}-\sin\theta_{\mathrm{s}})+(\cos\theta_{\mathrm{i}}+\cos\theta_{\mathrm{s}})\tan\alpha]x_0\} \\ &\quad \times \sin\left[(k\sin\theta_{\mathrm{i}}+k\cos\theta_{\mathrm{i}}\tan\alpha - k\sin\theta_{\mathrm{s}}+k\cos\theta_{\mathrm{s}}\tan\alpha)\cos\alpha\,\frac{L}{2}\right] \\ &\quad /[\pi r\cos\alpha(k\sin\theta_{\mathrm{i}}+k\cos\theta_{\mathrm{i}}\tan\alpha - k\sin\theta_{\mathrm{s}}+k\cos\theta_{\mathrm{s}}\tan\alpha)]\end{aligned} \tag{6.112}$$

当 $\alpha=\pi/2$ 时有

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{s}} &= \mathrm{i}\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega\sin\theta_{\mathrm{i}}\exp(\mathrm{i}kr)\,\hat{\boldsymbol{y}}\exp[-\mathrm{i}k(\cos\theta_{\mathrm{i}}+\cos\theta_{\mathrm{s}})z_0]W \\ &\quad \times \exp[\mathrm{i}k(\sin\theta_{\mathrm{i}}-\sin\theta_{\mathrm{s}})x_0]\sin\left[(k\cos\theta_{\mathrm{i}}+k\cos\theta_{\mathrm{s}})\frac{L}{2}\right] \\ &\quad /[\pi r(k\cos\theta_{\mathrm{i}}+k\cos\theta_{\mathrm{s}})]\end{aligned} \tag{6.113}$$

当 $\alpha\neq\pi/2$ 时，同理可以求得 VV 极化波入射时平板的 xOz 内的远场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{s}} &= \mathrm{i}\omega\mu(\bar{\bar{\boldsymbol{I}}} - \hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}})\int\int_{S_{\mathrm{p}}}\frac{\exp(\mathrm{i}k\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}s' \\ &= -\mathrm{i}\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega\exp(\mathrm{i}kr)\exp[-\mathrm{i}k(\cos\theta_{\mathrm{i}}+\cos\theta_{\mathrm{s}})(z_0+\tan\alpha x_0)]W \\ &\quad \times \exp\{\mathrm{i}k[(\sin\theta_{\mathrm{i}}-\sin\theta_{\mathrm{s}})+(\cos\theta_{\mathrm{i}}+\cos\theta_{\mathrm{s}})\tan\alpha]x_0\} \\ &\quad \times (\sin\alpha\sin\theta_{\mathrm{s}}+\cos\alpha\cos\theta_{\mathrm{s}}) \\ &\quad \times \sin\left[(k\sin\theta_{\mathrm{i}}+k\cos\theta_{\mathrm{i}}\tan\alpha - k\sin\theta_{\mathrm{s}}+k\cos\theta_{\mathrm{s}}\tan\alpha)\cos\alpha\,\frac{L}{2}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

$$/[\pi r\cos\alpha(k\sin\theta_i + k\cos\theta_i\tan\alpha - k\sin\theta_s + k\cos\theta_s\tan\alpha)] \tag{6.114}$$

当 $\alpha=\pi/2$ 时有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_p^s = &-\mathrm{i}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta_s\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega\exp(\mathrm{i}kr)\exp[-\mathrm{i}k(\cos\theta_i+\cos\theta_s)z_0]W\\ &\times\exp[\mathrm{i}k(\sin\theta_i-\sin\theta_s)x_0]\sin\left[(k\cos\theta_i+k\cos\theta_s)\frac{L}{2}\right]\\ &/[\pi r(k\cos\theta_i+k\cos\theta_s)]\end{aligned} \tag{6.115}$$

其中，$\boldsymbol{E}_p^s$ 中的角标 p 表示“平板”，s 表示“散射场”。

3. 耦合散射场的求解

在此应用互易性定理求解介质粗糙海面和导体平板耦合散射问题，假设在后向远区 $\boldsymbol{r}_0$ 处有一单位点电流源 $\boldsymbol{J}_e=\hat{\boldsymbol{y}}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 和一单位点磁流源 $\boldsymbol{M}_m=\hat{\boldsymbol{\theta}}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$，由它们激发的电场和磁场在远区近似条件下分别为

$$\boldsymbol{E}_{ed}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{i}kZ_0}{4\pi r_0}\exp(\mathrm{i}kr_0)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r})\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{6.116}$$

$$\boldsymbol{H}_{md}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{i}kY_0}{4\pi r_0}\exp(\mathrm{i}kr_0)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r})\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{6.117}$$

其中，Z_0,Y_0 分别为自由空间的波阻抗及导纳，$\boldsymbol{k}_s$ 为散射波矢。

在式(6.116)和式(6.117)中令 $E_0=\frac{\mathrm{i}kZ_0}{4\pi r_0}\exp(\mathrm{i}kr_0)$，$H_0=\frac{\mathrm{i}kY_0}{4\pi r_0}\exp(\mathrm{i}kr_0)$ 可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{ed}(\boldsymbol{r}) = E_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r})\,\hat{\boldsymbol{y}}\\ \boldsymbol{H}_{md}(\boldsymbol{r}) = H_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{cases} \tag{6.118}$$

令 $\widetilde{A}=x-x_0$，$\widetilde{B}=y-y_0$，$\widetilde{C}=z-z_0$，$\widetilde{D}=\sqrt{\widetilde{A}^2+\widetilde{B}^2+\widetilde{C}^2}$，当 $\alpha\neq\pi/2$ 时，$\boldsymbol{E}_{ed}$ 经平板的一次散射场可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{ep}^{sh} = &\frac{\mathrm{i}\omega\mu(\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}})}{\cos\alpha}\iint_{S_p}\left(\frac{\exp(\mathrm{i}k\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|)}{4\pi\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|}\left(-2E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)\cos(\theta_i+\alpha)\right.\\ &\left.\times\exp(\mathrm{i}kx'\sin\theta_i-\mathrm{i}k\cos\theta_i z')\,\hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\right)\\ \approx&\frac{-\mathrm{i}(\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}-\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{y}}\,\omega\mu E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos(\theta_i+\alpha)}{2\pi\cos\alpha}2\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\frac{1}{k\widetilde{B}}\\ &\times\int_{x_0-L\cos\alpha/2}^{x_0+L\cos\alpha/2}\exp\left\{\mathrm{i}k\left[\widetilde{D}-\frac{\widetilde{A}(x'-x_0)+[f(x)-z_0](z'-z_0)}{\widetilde{D}}\right.\right.\\ &\left.\left.+x'\sin\theta_i-z'\cos\theta_i\right]\right\}\mathrm{d}x' = [(1-\sin^2\theta_{ss}\sin^2\phi_{ss})\,\hat{\boldsymbol{y}}'\\ &-\sin^2\theta_{ss}\cos\varphi_{ss}\sin\varphi_{ss}\,\hat{\boldsymbol{x}}'-\sin\theta_{ss}\cos\theta_{ss}\sin\varphi_{ss}\,\hat{\boldsymbol{z}}']\\ &\times\frac{\mathrm{i}E_0\cos(\theta_i+\alpha)}{\pi}2\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\frac{1}{k\widetilde{B}}\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\end{aligned}$$

$$\times \exp\left\{ ik\frac{\widetilde{A}x_0+[f(x)-z_0]z_0}{\widetilde{D}}\right\}\exp\left\{-ik\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_i\right]\right.$$

$$\left.(z_0+x_0\tan\alpha)\right\}\exp\left\{-ik\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]x_0\right\}$$

$$\times\sin\left\{-k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]\cos\alpha\frac{L}{2}\right\}$$

$$\Big/\left\{\cos\alpha\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]\right\} \tag{6.119}$$

式(6.119)在应用远场近似时要求观察点(海面)相对于源点(平板)的位置必须满足远场条件,具体可参见文献[22]。当 $\alpha\neq\pi/2$ 时,$\boldsymbol{H}_{\mathrm{md}}$ 经平板的散射场可以表示为

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{mp}}^{\mathrm{sh}}=(-\cos\theta_{ss}\,\hat{\boldsymbol{x}}'+\sin\theta_{ss}\cos\varphi_{ss}\,\hat{\boldsymbol{z}}')\,\frac{\mathrm{i}H_0\cos(\theta_i+\alpha)}{\pi}2\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\frac{1}{k\widetilde{B}}$$

$$\times\exp\left(ik\sqrt{\widetilde{A}^2+[f(x)-z_0]^2}\right)\exp\left\{ik\frac{\widetilde{A}x_0+[f(x)-z_0]z_0}{\widetilde{D}}\right\}$$

$$\times\exp\left\{-ik\left[\frac{[f(x)-z_0]}{\widetilde{D}}+\cos\theta_i\right](z_0+x_0\tan\alpha)\right\}$$

$$\times\exp\left\{-ik\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]x_0\right\}$$

$$\times\sin\left\{-k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]\cos\alpha\frac{L}{2}\right\}$$

$$\Big/\left\{\cos\alpha\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]\right\} \tag{6.120}$$

当 $\alpha=\pi/2$ 时有

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ep}}^{\mathrm{sh}}=-[(1-\sin^2\theta_{ss}\sin^2\varphi_{ss})\,\hat{\boldsymbol{y}}'-\sin^2\theta_{ss}\cos\varphi_{ss}\sin\varphi_{ss}\,\hat{\boldsymbol{x}}'-\sin\theta_{ss}\cos\theta_{ss}\sin\varphi_{ss}\,\hat{\boldsymbol{z}}']$$

$$\times\frac{\mathrm{i}E_0\sin\theta_i}{\pi}2\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\,\widetilde{D}}\right)\frac{1}{k\widetilde{B}}\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\exp(-\mathrm{i}k\cos\theta_i z_0+\mathrm{i}k\sin\theta_i x_0)$$

$$\times\sin\left\{k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_i\right]\frac{L}{2}\right\}\Big/\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_i\right] \tag{6.121}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{mp}}^{\mathrm{sh}}=(-\cos\theta_{ss}\,\hat{\boldsymbol{x}}'+\sin\theta_{ss}\cos\varphi_{ss}\,\hat{\boldsymbol{z}}')\,\frac{\mathrm{i}H_0\sin\theta_i}{\pi}2\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\frac{1}{k\widetilde{B}}\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})$$

$$\Big/\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_i\right]\exp(-\mathrm{i}k\cos\theta_i z_0+\mathrm{i}k\sin\theta_i x_0)$$

$$\times\sin\left\{k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_i\right]\frac{L}{2}\right\} \tag{6.122}$$

其中,θ_{ss} 和 φ_{ss} 是以平板的法向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为 $\hat{\boldsymbol{z}}'$ 方向,$\hat{\boldsymbol{y}}'=\hat{\boldsymbol{y}}$ 确立的平板局部坐标系中的散射角度(图 6.48)。

当单位电流源 $\boldsymbol{J}_e$ 极化为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向，$\boldsymbol{M}_m$ 极化为 $-\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向，当 $\alpha\neq\pi/2$ 时，同理可得到

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\mathrm{ep}}^{\mathrm{sv}}=&\frac{\mathrm{i}[(\sin^2\theta_{\mathrm{ss}}\cos^2\varphi_{\mathrm{ss}}-1)\,\hat{\boldsymbol{x}}'+\sin^2\theta_{\mathrm{ss}}\sin\varphi_{\mathrm{ss}}\cos\varphi_{\mathrm{ss}}\,\hat{\boldsymbol{y}}'+\sin\theta_{\mathrm{ss}}\cos\theta_{\mathrm{ss}}\cos\varphi_{\mathrm{ss}}\,\hat{\boldsymbol{z}}']E_0}{\pi}\\
&\times\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\frac{2}{k\widetilde{B}}\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\exp\left\{\mathrm{i}k\frac{\widetilde{A}x_0+[f(x)-z_0]z_0}{\widetilde{D}}\right\}\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}\right.\right.\\
&\left.\left.+\cos\theta_{\mathrm{i}}\right](z_0+x_0\tan\alpha)\right\}\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_{\mathrm{i}}-\tan\alpha\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]x_0\right\}\\
&\times\sin\left\{-k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_{\mathrm{i}}-\tan\alpha\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]\cos\alpha\,\frac{L}{2}\right\}\\
&\bigg/\left\{\cos\alpha\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_{\mathrm{i}}-\tan\alpha\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]\right\}
\end{aligned}\tag{6.123}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_{\mathrm{mp}}^{\mathrm{sv}}=&\frac{\mathrm{i}(-\cos\theta_{\mathrm{ss}}\,\hat{\boldsymbol{y}}'+\sin\theta_{\mathrm{ss}}\sin\varphi_{\mathrm{ss}}\,\hat{\boldsymbol{z}}')H_0}{\pi}\,\frac{2}{k\widetilde{B}}\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\\
&\times\exp\left\{\mathrm{i}k\frac{\widetilde{A}x_0+[f(x)-z_0]z_0}{\widetilde{D}}\right\}\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_{\mathrm{i}}\right](z_0+x_0\tan\alpha)\right\}\\
&\times\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_{\mathrm{i}}-\tan\alpha\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]x_0\right\}\\
&\times\sin\left\{-k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_{\mathrm{i}}-\tan\alpha\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]\cos\alpha\,\frac{L}{2}\right\}\\
&\bigg/\left\{\cos\alpha\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_{\mathrm{i}}-\tan\alpha\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]\right\}
\end{aligned}\tag{6.124}
$$

当 $\alpha=\pi/2$ 时有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\mathrm{ep}}^{\mathrm{sv}}=&\frac{\mathrm{i}[(\sin^2\theta_{\mathrm{ss}}\cos^2\varphi_{\mathrm{ss}}-1)\,\hat{\boldsymbol{x}}'+\sin^2\theta_{\mathrm{ss}}\sin\varphi_{\mathrm{ss}}\cos\varphi_{\mathrm{ss}}\,\hat{\boldsymbol{y}}'+\sin\theta_{\mathrm{ss}}\cos\theta_{\mathrm{ss}}\cos\varphi_{\mathrm{ss}}\,\hat{\boldsymbol{z}}']}{\pi}\\
&\times\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\frac{2E_0}{k\widetilde{B}}\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\exp(-\mathrm{i}k\cos\theta_{\mathrm{i}}z_0+\mathrm{i}k\sin\theta_{\mathrm{i}}x_0)\\
&\times\sin\left\{k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]\frac{L}{2}\right\}\bigg/\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]
\end{aligned}\tag{6.125}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_{\mathrm{mp}}^{\mathrm{sv}}=&\frac{\mathrm{i}(-\cos\theta_{\mathrm{ss}}\,\hat{\boldsymbol{y}}'+\sin\theta_{\mathrm{ss}}\sin\varphi_{\mathrm{ss}}\,\hat{\boldsymbol{z}}')H_0}{\pi}\,\frac{2}{k\widetilde{B}}\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\bigg/\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\\
&\times\exp(-\mathrm{i}k\cos\theta_{\mathrm{i}}z_0+\mathrm{i}k\sin\theta_{\mathrm{i}}x_0)\sin\left\{k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]\frac{L}{2}\right\}
\end{aligned}\tag{6.126}
$$

其中，$\theta_{\mathrm{ss}}=\arctan(\sqrt{x'^2+y'^2}/z')$ 为单位源激发的场经平板散射时的散射角，φ_{ss} 为方位角，并且当 $y'\geqslant0$，$\varphi_{\mathrm{ss}}=\arccos(x'/\sqrt{x'^2+y'^2})$，否则取 $\varphi_{\mathrm{ss}}=2\pi-\arccos(x'/\sqrt{x'^2+y'^2})$。

根据上面的分析求得了介质海面的表面电磁流和平板对单位源所激发的电磁场的散射场，根据互易性定理，可以求得二次耦合散射场(式(6.93))。

对于 HH 极化波而言，当 $\alpha\neq\pi/2$ 时有

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sh}}=&\iint_{S_r}\boldsymbol{J}_{\mathrm{rte}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{ep}}^{\mathrm{sh}}\mathrm{d}s\\
=&\mathrm{i}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0\cos(\theta_i+\alpha)(1-R_{\mathrm{HH}})\iint_{S_r}\frac{(\cos\theta_i+f_x'\sin\theta_i)\exp[\mathrm{i}kx\sin\theta_i-\mathrm{i}kf\cos\theta_i]}{\sqrt{1+f_x'}}\\
&\times\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\frac{2\widetilde{D}}{k\widetilde{B}}(1-\sin^2\theta_{ss}\sin^2\varphi_{ss})\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\exp\left\{\mathrm{i}k\frac{\widetilde{A}x_0+[f(x)-z_0]z_0}{\widetilde{D}}\right\}\\
&\times\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_i\right](z_0+x_0\tan\alpha)\right\}\\
&\times\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]x_0\right\}\\
&\times\sin\left\{-k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]\cos\alpha\,\frac{L}{2}\right\}\\
&/\{\cos\alpha\pi\tan\alpha[\widetilde{A}-[f(x)-z_0]-(\sin\theta_i+\tan\alpha\cos\theta_i)\widetilde{D}]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}\tag{6.127}
$$

其中，R_{HH} 为 HH 极化方式下的菲涅耳反射系数。

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sh}}=&\iint_{S_r}\boldsymbol{M}_{\mathrm{rte}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{ep}}^{\mathrm{sh}}\mathrm{d}s\\
=&\frac{-\mathrm{i}H_0\cos(\theta_i+\alpha)(1+R_{\mathrm{HH}})}{\pi}\iint_{S_r}\frac{((f_x'\sin\alpha-\cos\alpha)\cos\theta_{ss}+(f_x'\cos\alpha+\sin\alpha)\sin\theta_{ss}\cos\varphi_{ss})}{\sqrt{1+f_x^2}}\\
&\times\exp[\mathrm{i}kx\sin\theta_i-\mathrm{i}kf(x)\cos\theta_i]\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\exp\left\{\mathrm{i}k\frac{\widetilde{A}x_0+[f(x)-z_0]z_0}{\mathrm{i}k\widetilde{D}}\right\}\\
&\times\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{[f(x)-z_0]}{\mathrm{i}k\widetilde{D}}+\cos\theta_i\right]\frac{2\widetilde{D}}{k\widetilde{B}}(z_0+x_0\tan\alpha)\right\}\\
&\times\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\mathrm{i}k\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]x_0\right\}\\
&\times\sin\left\{-k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\mathrm{i}k\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]\cos\alpha\,\frac{L}{2}\right\}\\
&/\{\cos\alpha[\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha-(\sin\theta_i+\tan\alpha\cos\theta_i)\mathrm{i}k\widetilde{D}]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}\tag{6.128}
$$

而当 $\alpha=\pi/2$ 时有

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sh}}=&\iint_{S_r}\boldsymbol{J}_{\mathrm{rte}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{ep}}^{\mathrm{sh}}\mathrm{d}s\\
=&\frac{-\mathrm{i}E_0\sin\theta_i(1-R_{\mathrm{HH}})}{\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\iint_{S_r}\frac{(\cos\theta_i+f_x'\sin\theta_i)\exp[\mathrm{i}kx\sin\theta_i-\mathrm{i}kf(x)\cos\theta_i]}{\sqrt{1+f_x'}}\\
&\times\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\frac{2\widetilde{D}}{k\widetilde{B}}(1-\sin^2\theta_{ss}\sin^2\varphi_{ss})\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})/[f(x)-z_0+\widetilde{D}\cos\theta_i]
\end{aligned}
$$

$$\times \exp[-\mathrm{i}k\cos\theta_i z_0 + \mathrm{i}k\sin\theta_i x_0]\sin\left\{k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}} + \cos\theta_i\right]\frac{L}{2}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.129}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sh}} &= \iint_{S_r}\boldsymbol{M}_{\mathrm{rte}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{ep}}^{\mathrm{sh}}\mathrm{d}s \\ &= \iint_{S_r}((f_x'\sin\alpha-\cos\alpha)\cos\theta_{\mathrm{ss}} + (f_x'\cos\alpha+\sin\alpha)\sin\theta_{\mathrm{ss}}\cos\varphi_{\mathrm{ss}}) \\ &\quad\times\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\Big/\sqrt{1+f_x'^2}\exp[\mathrm{i}kx\sin\theta_i-\mathrm{i}kf(x)\cos\theta_i] \\ &\quad\times\frac{\mathrm{i}2H_0\sin\theta_i(1+R_{\mathrm{HH}})}{\pi}\exp(-\mathrm{i}k\cos\theta_i z_0+\mathrm{i}k\sin\theta_i x_0) \\ &\quad\times\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\sin\left\{k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_i\right]\frac{L}{2}\right\}\widetilde{D}/k\widetilde{B}[f(x) \\ &\quad - z_0+\cos\theta_i\widetilde{D}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{6.130}$$

这样，HH 极化耦合散射场可以表示为$\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{pr_total}}^{\mathrm{sh}}=\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sh}}+\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sh}}$。

同样，对于 VV 极化波而言，当 $\alpha\neq\pi/2$ 时有

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sv}} &= \iint_{S_r}\boldsymbol{J}_{\mathrm{rtm}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{ep}}^{\mathrm{sv}}\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{i}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0(1+R_{\mathrm{VV}})\iint_{S_r}\frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2}}\{(1-\sin^2\theta_{\mathrm{ss}}\cos^2\varphi_{\mathrm{ss}})\cos\alpha+\sin\alpha\sin\theta_{\mathrm{ss}} \\ &\quad\times\cos\theta_{\mathrm{ss}}\cos\varphi_{\mathrm{ss}}-f_x'[(1-\sin^2\theta_{\mathrm{ss}}\cos^2\varphi_{\mathrm{ss}})\sin\alpha+f_x'\cos\alpha\sin\theta_{\mathrm{ss}}\cos\theta_{\mathrm{ss}}\cos\varphi_{\mathrm{ss}}]\} \\ &\quad\times\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\frac{2\widetilde{D}}{k\widetilde{B}}\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\exp\left[\mathrm{i}k\frac{\widetilde{A}x_0+[f(x)-z_0]z_0}{\widetilde{D}}\right] \\ &\quad\times\exp[\mathrm{i}kx\sin\theta_i-\mathrm{i}kf\cos\theta_i]\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_i\right](z_0+x_0\tan\alpha)\right\} \\ &\quad\times\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]x_0\right\} \\ &\quad\times\sin\left\{-k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_i-\tan\alpha\cos\theta_i\right]\cos\alpha\frac{L}{2}\right\} \\ &\quad\Big/\{\cos\alpha\pi[\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha-(\sin\theta_i+\tan\alpha\cos\theta_i)\widetilde{D}]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{6.131}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sv}} &= \iint_{S_r}\boldsymbol{M}_{\mathrm{rtm}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{ep}}^{\mathrm{sv}}\mathrm{d}s \\ &= \frac{-\mathrm{i}H_0(1-R_{\mathrm{VV}})}{\pi}\iint_{S_r}\frac{(\cos\theta_i+f_x'\sin\theta_i)\cos\theta_{\mathrm{ss}}\exp[\mathrm{i}kx\sin\theta_i-\mathrm{i}kf\cos\theta_i]}{\sqrt{1+f_x'^2}} \\ &\quad\times\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\frac{2\widetilde{D}}{k\widetilde{B}}\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\exp\left[\mathrm{i}k\frac{\widetilde{A}x_0+[f(x)-z_0]z_0}{\widetilde{D}}\right]\end{aligned}$$

$$\times \exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_{\mathrm{i}}\right](z_0+x_0\tan\alpha)\right\}$$
$$\times \exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_{\mathrm{i}}-\tan\alpha\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]x_0\right\}$$
$$\times \sin\left\{-k\left[\frac{\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha}{\widetilde{D}}-\sin\theta_{\mathrm{i}}-\tan\alpha\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]\cos\alpha\frac{L}{2}\right\}$$
$$\Big/\{\pi\cos\alpha[\widetilde{A}-[f(x)-z_0]\tan\alpha-(\sin\theta_{\mathrm{i}}+\tan\alpha\cos\theta_{\mathrm{i}})\widetilde{D}]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (6.132)$$

而当 $\alpha=\pi/2$ 时，

$$\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sv}}=\iint_{S_{\mathrm{r}}}\boldsymbol{J}_{\mathrm{rtm}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{ep}}^{\mathrm{sv}}\mathrm{d}s$$
$$=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0\frac{1+R_{\mathrm{VV}}}{\pi}\iint_{S_{\mathrm{r}}}\frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2}}\{(1-\sin^2\theta_{\mathrm{ss}}\cos^2\varphi_{\mathrm{ss}})\cos\alpha+\sin\alpha\sin\theta_{\mathrm{ss}}\cos\theta_{\mathrm{ss}}\cos\varphi_{\mathrm{ss}}$$
$$-f_x'[(1-\sin^2\theta_{\mathrm{ss}}\cos^2\varphi_{\mathrm{ss}})\sin\alpha+f_x'\cos\alpha\sin\theta_{\mathrm{ss}}\cos\theta_{\mathrm{ss}}\cos\varphi_{\mathrm{ss}}]\}$$
$$\times\exp[\mathrm{i}kx\sin\theta_{\mathrm{i}}-\mathrm{i}kf\cos\theta_{\mathrm{i}}]\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\sin\left\{k\left[\frac{f-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]\frac{L}{2}\right\}$$
$$\times\exp[-\mathrm{i}k\cos\theta_{\mathrm{i}}z_0+\mathrm{i}k\sin\theta_{\mathrm{i}}x_0]\frac{2\widetilde{D}}{k\widetilde{B}}\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})/[f-z_0+\cos\theta_{\mathrm{i}}\widetilde{D}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$(6.133)$$

$$\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sv}}=\iint_{S_{\mathrm{r}}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{rtm}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{ep}}^{\mathrm{sv}}\mathrm{d}s$$
$$=\frac{-\mathrm{i}H_0(1-R_{\mathrm{VV}})}{\pi}\iint_{S_{\mathrm{r}}}\frac{(\cos\theta_{\mathrm{i}}+f_x'\sin\theta_{\mathrm{i}})\cos\theta_{\mathrm{ss}}\exp[\mathrm{i}kx\sin\theta_{\mathrm{i}}-\mathrm{i}kf\cos\theta_{\mathrm{i}}]}{\sqrt{1+f_x'^2}}$$
$$\times\sin\left(\frac{k\widetilde{B}W}{2\widetilde{D}}\right)\frac{2\widetilde{D}}{k\widetilde{B}}\exp(\mathrm{i}k\widetilde{D})\exp[-\mathrm{i}k\cos\theta_{\mathrm{i}}z_0+\mathrm{i}k\sin\theta_{\mathrm{i}}x_0]$$
$$\times\sin\left\{k\left[\frac{f(x)-z_0}{\widetilde{D}}+\cos\theta_{\mathrm{i}}\right]\frac{L}{2}\right\}\Big/[f(x)-z_0+\cos\theta_{\mathrm{i}}\widetilde{D}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (6.134)$$

这样，VV 极化时的耦合散射场为$\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{pr_total}}^{\mathrm{sv}}=\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sv}}+\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\hat{\boldsymbol{h}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{pr}}^{\mathrm{sv}}$。

在积分上、下限的选取过程中作近似处理，因为散射平板对单位源所激发的电磁场的散射主要集中在镜向及其附近方向上，所以积分限的选取如图 6.49 所示。y 方向的积分上、下限为$(y_0-W/2,y_0+W/2)$，x 方向的积分上、下限分别为

$$x_2=x_0+\frac{L}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\left[z_0-\frac{L}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]\cot\left(\frac{3}{2}\pi-\theta_{\mathrm{i}}-2\alpha+\beta\right)$$
$$(6.135)$$
$$x_1=x_0-\frac{L}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\left[z_0+\frac{L}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]\cot\left(\frac{3}{2}\pi-\theta_{\mathrm{i}}-2\alpha-\beta\right)$$
$$(6.136)$$

4. 总散射场的求解及多普勒谱

散射场都可以写成下面的形式[22]：

$$\boldsymbol{E}^s = \left[\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}\right]\bar{\bar{S}}\boldsymbol{E}^i \tag{6.137}$$

其中，$\bar{\bar{S}}$是散射矩阵因子。通过上面的计算容易求得 S_r，S_p 和 S_{pr}。

在耦合散射中散射矩阵因子存在下面的关系：

$$\bar{\bar{S}}_{rp}(\hat{\boldsymbol{k}}_s, \hat{\boldsymbol{k}}_i) = \bar{\bar{S}}_{pr}^{(-t)}(-\hat{\boldsymbol{k}}_i, -\hat{\boldsymbol{k}}_s) \tag{6.138}$$

把式(6.138)写为矩阵的形式[22]

$$\begin{bmatrix} S_{rp}^{VV}(\hat{\boldsymbol{k}}_i, \hat{\boldsymbol{k}}_s) & S_{rp}^{VH}(\hat{\boldsymbol{k}}_i, \hat{\boldsymbol{k}}_s) \\ S_{rp}^{HV}(\hat{\boldsymbol{k}}_i, \hat{\boldsymbol{k}}_s) & S_{rp}^{HH}(\hat{\boldsymbol{k}}_i, \hat{\boldsymbol{k}}_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pr}^{VV}(-\hat{\boldsymbol{k}}_s, -\hat{\boldsymbol{k}}_i) & -S_{pr}^{HV}(-\hat{\boldsymbol{k}}_s, -\hat{\boldsymbol{k}}_i) \\ -S_{pr}^{VH}(-\hat{\boldsymbol{k}}_s, -\hat{\boldsymbol{k}}_i) & S_{pr}^{HH}(-\hat{\boldsymbol{k}}_s, -\hat{\boldsymbol{k}}_i) \end{bmatrix} \tag{6.139}$$

当求解粗糙面与目标后向复合散射时，式(6.139)可简化为[22]

$$\begin{bmatrix} S_{rp}^{VV} & 0 \\ 0 & S_{rp}^{HH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pr}^{VV} & 0 \\ 0 & S_{pr}^{HH} \end{bmatrix} \tag{6.140}$$

根据上面的求解可得到后向耦合及复合散射截面

$$\sigma_{pr} = 4\pi|2S_{pr}|^2, \quad \sigma = 4\pi|S_r + 2S_{pr} + S_p|^2 \tag{6.141}$$

由上面求解的复合散射场，可以分析复合散射多普勒谱的性质。多普勒谱一般定义为下面的形式：

$$S(f) = \frac{1}{T}\left|\int_0^T E^s(t, \theta_i, \theta_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}t\right|^2 \tag{6.142}$$

当讨论后向散射问题时有 $\theta_s = -\theta_i$。

5. 数值结果讨论与分析

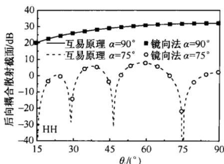


图 6.50　不同 α 角时互易性定理与镜向法结果的比较

为了验证应用互易性定理求解目标与粗糙面复合散射的有效性，将介质粗糙面退化到导体粗糙面的情形，分别应用镜向法[23]和互易性定理计算了导体平板处于不同倾角与无限大平面的二次后向耦合散射截面随入射角的变化，如图 6.50 所示，其中，平板尺寸为 $L=W=1.2\lambda$，平板中心位置参数 $x_0=0$，$y_0=z_0=6\mathrm{m}$。通过比较可以看出两种方法求解的后向耦合散射截面完全一致，这就验证了应用互

易性定理求解粗糙面与平板耦合散射的可行性，关于这一点，我们在文献[24,25]中已进行了较为详细的讨论。

为了进一步说明计算的准确性，图 6.51 和图 6.52 给出了 $t=0$ 时刻张角 β 对后向复合和二次耦合散射截面角分布的影响，其中，海上风速 $U_{19.5}=5\text{m/s}$，入射波频率为 1GHz，海水的相对介电常数为(80.0, 71.0)，平板尺寸为 $L=3.0\lambda$，$W=1.8\lambda$，平板中心位置为 $(x_0, y_0, z_0)=(0\text{m}, 0\text{m}, 10\text{m})$，倾角 $\alpha=90°$，粗糙面统计样本数为 20。

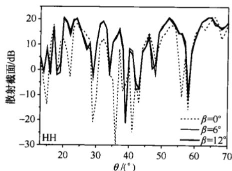


图 6.51　后向复合散射截面随 β 角的变化

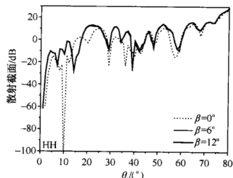


图 6.52　耦合散射截面随 β 角的变化

从图 6.51 和图 6.52 可以看出对确定的入射角，后向复合和二次耦合散射截面随 β 角增大而增大并最终趋于定值，当 $\beta=6°$ 和 $\beta=12°$ 时，后向复合散射截面和二次耦合散射截面随入射角的变化几乎一致，这是因为平板对入射波的一次散射场的能量主要集中在镜反射方向($\beta=0°$)上，它是影响耦合散射场的主要因素，而对于有限尺寸的平板而言，靠近其镜向两侧的一次散射场对耦合散射的影响也不可忽略，随着张角 β 的增大，β 以外的非镜向散射场的能量越来越小直至可以忽略，此时，耦合散射场随 β 的增大而增大并逐渐趋于定值。因此，根据平板目标散射的特点，可以在特定范围内进行积分，而不用对整个粗糙面进行积分就可以得到较为准确的结果。因此，以下在保证准确性的前提下，取张角 $\beta=6°$(β 取值大小直接影响运算速度)。

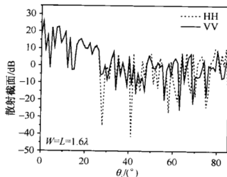


图 6.53　不同极化方式下的复合散射截面

图 6.53 给出了 HH 极化和 VV 极化下复合散射截面随入射角的变化，其中，主要参数分别为 $x_0=0\text{m}$，$y_0=0\text{m}$，$z_0=10\text{m}$，$\alpha=80°$，$U_{19.5}=5\text{m/s}$，平板的尺寸为

$W=L=1.6\lambda$，入射波频率为 1GHz。从图中可以看出在小入射角情况下，两种极化的散射场幅值相差不大，而在大、中入射角情况下两者有一定的差别。

图 6.54 给出了不同平板尺寸下总的后向复合散射截面，其他参数同图 6.53。从图中可以看出在小入射角（$\theta_i<13°$）情况下，复合散射场幅值几乎不随平板尺寸改变，这主要是因为在小入射角下，平板和粗糙面的耦合面积较小，耦合散射场对复合散射场贡献很小，所以复合散射场和单纯粗糙面散射场幅值相差不大；而在大入射角情况下，随着平板尺寸的增大，复合散射场有明显增大的趋势，这主要是由于随着平板尺寸的增大，平板本身的散射增强，同时平板和海面之间的耦合面积增大，它们之间的耦合作用增强。图 6.55 给出了 $t=0$ 时刻不同平板高度下后向复合散射截面，其中，平板尺寸为 $W=L=2.4\lambda$，平板倾角 $\alpha=90°$，z_0 的变化范围为 10～25m，其他参数同图 6.53。从图中可以看出在小入射角情况下，复合散射截面幅值随平板高度的变化与图 6.54 类似，这主要也是因为小入射角下复合散射截面和单纯粗糙面的情形相差不大造成的。随着入射角的增大，复合散射场幅值并未随平板高度的变化而单调变化，主要原因是利用互易性定理求解该复合问题时，粗糙海面、平板自身的散射及它们之间的耦合散射三部分共同决定了复合散射场大小，而从图 6.49 可知粗糙海面与平板耦合散射面积主要由入射角 θ_i、张角 β 和平板尺寸及倾角 α 决定，而高度对于耦合面积的大小影响不大，仅仅影响耦合面积所处的位置（x，y 方向上的积分上、下限），加之粗糙海面的随机性，所以复合散射场幅值随高度的变化呈交替变化趋势。

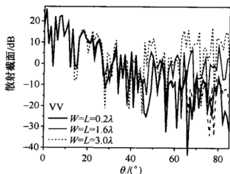


图 6.54 复合散射截面和平板尺寸的关系

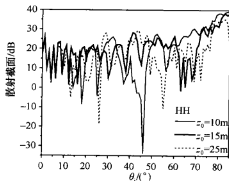


图 6.55 复合散射截面和平板高度的关系

图 6.56 给出了后向复合散射截面随海面风速的变化情况，其中，平板中心位置取为（x_0，y_0，z_0）=（0m，0m，10m），海面风速变化范围为 $U_{19.5}=3\sim10\mathrm{m/s}$，其他参数同图 6.55。从图中可以看出在小入射角下，平板与海面的后向复合散射同单纯海面的散射结果相差不大，随入射角的增大，平板的一次散射及其与粗糙面的耦合散射将增大，使得总的后向复合散射截面幅值与单纯海面的幅值差异变大。另

外，还可以发现在大部分入射角范围内，后向复合散射场随着风速的减小而增大，这主要是因为当 $\alpha=90°$时，后向耦合散射方向恰恰是平板一次散射场经粗糙面二次散射的镜反射方向，而风速越小，粗糙海面越平滑，其镜反射（相干散射分量）越强，所以此时的耦合散射场的强度越强，进而导致复合散射场的强度也随之增大。可以验证，当 α 远离 90°时，后向复合散射场随着风速的增大而增大，这主要是因为此时后向耦合散射方向不再是平板一次散射场经粗糙面二次散射的镜反射方向，平板一次散射场经粗糙面的漫射分量（非相干散射分量）在耦合散射场中起主要作用，因此，随着风速的增加，耦合散射场的强度有所增强。图 6.57 给出了后向复合散射截面随平板倾角的变化情况，其中，平板尺寸为 $W=L=2.4\lambda$，平板倾角 $\alpha=30°\sim90°$，其他参数同图 6.53。从图中可以看出在小入射角下，平板倾角的变化对于后向复合散射影响不大，在大、中入射角下，后向复合散射截面幅值随着平板倾角的增大而增大，这主要也是因为当平板倾角越大（$\alpha=90°$）时，后向耦合散射方向越靠近平板一次散射场经粗糙面二次散射的镜反射方向，所以后向耦合散射场越强，当 α 远离 90°（$\alpha=30°$）时，后向耦合散射方向将远离平板一次散射场经粗糙面二次散射的镜反射方向，平板一次散射场经粗糙面的漫射分量（非相干散射分量）在耦合散射场中起主要作用，因此，后向耦合散射场的强度有所减小，导致总的后向复合散射也越小。

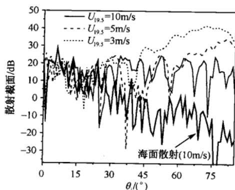


图 6.56　复合散射截面和风速的关系

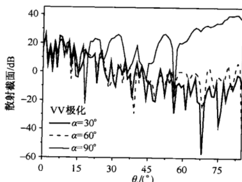


图 6.57　复合散射截面和平板倾角的关系

图 6.58 给出了入射角为 70°，平板的运动速度为 10m/s 时的粗糙海面散射场和复合散射场实部的时间序列，其他参数同图 6.53。从图中可以看出粗糙海面散射场时间序列比复合散射场时间序列更粗糙，这主要是因为粗糙海面不规则并且随着时间不断的变化，所以得到的散射场时间序列（海杂波）也是不规则的。当粗糙海面上方加上平板目标以后，由于目标是一个规则确定性物体且不随时间变化，此时复合散射场中，除了随机粗糙海面的后向散射场外，又增加了确定性目标的散射场及它们的耦合散射场，所以复合散射场时间序列也变得相对平滑一些。分析

两者之间的动态特性对从海杂波中探测目标具有一定的意义，这在目标探测方面具有很强的实际应用价值，国内外在这一方面已经做了大量工作。

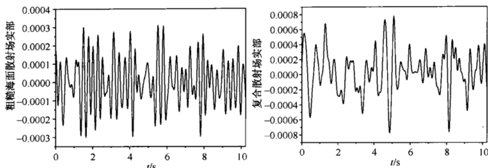


图 6.58　粗糙海面散射场和复合散射场实部的时间序列

以下针对平板和海面复合散射场的多普勒频谱特性进行计算和讨论。

图 6.59 首先给出了平板静止时不同风速下海面、海面与目标耦合及海面与目标复合散射场的多普勒谱，其计算参数如图中所示，其中，图 6.59(a)是单纯海面散射的多普勒谱。可以看出随着风速的增大，多普勒频移有逐渐增大的趋势，这与 Rozenberg 等通过浪池试验的测量结果[26]是一致的，同时风速越大时，多普勒谱瓣有所展宽，这主要是因为随着海面粗糙度的增大，漫射现象(非相干散射)更加显著，从而使得回波的能量向更多频率展宽。图 6.59(b)是海面与平板耦合散射的多普勒谱，可以看出随着风速的增大，耦合散射的多普勒频移并未有明显改变，但多普勒谱瓣也有所展宽，这主要也是因为随着海面粗糙度的增大，非相干散射更加显著，从而也在一定程度上影响到耦合散射，使得耦合散射回波的能量向稍多频率展宽。图 6.59(c)给出了复合散射场的多普勒谱，与耦合散射的多普勒谱情况类似，复合散射场的多普勒谱频移也未有明显改变，但多普勒谱瓣也有所展宽，并且总体而言，无论是海面散射的多普勒谱或者耦合、复合散射场的多普勒谱，其幅值均随着风速的增大有所减小，对于单纯海面散射而言，由于风速越大，海面越粗糙，非相干散射越强，后向散射越弱造成其对应的多普勒谱幅值减小。由于此时倾角较大($\alpha=90°$)，对于耦合散射和复合散射场而言，其散射强度也随着风速的增大而减小(详见图 6.56 的说明)，所以相应的多普勒谱幅值也是减小的。

图 6.60 给出了后向复合散射场的多普勒谱峰值随着静止平板尺寸的变化情况。从图中可以看出随着平板尺寸的增大，复合散射场的多普勒谱的峰值也会逐渐增大，这主要是因为随着平板尺寸的增大，平板目标本身的散射信号增强，平板与粗糙海面之间的耦合散射也随之增强，这使得多普勒谱的峰值逐渐增大，同样依据这一原理也可以实现杂波中的目标检测。图 6.61 给出了后向复合散射场的多

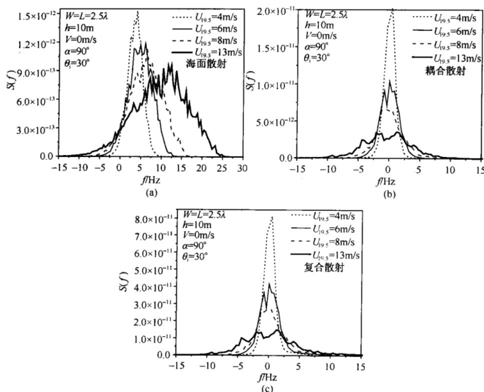


图 6.59　不同风速下散射场的多普勒谱分布

普勒谱峰值随着静止平板高度的变化情况。从图中可以看出随着平板高度的变化，复合散射场的多普勒谱的峰值并未有太大变化，这也是由于后向复合散射场并没有随平板高度的变化而单调变化，导致多普勒谱也未随平板高度呈单调变化。

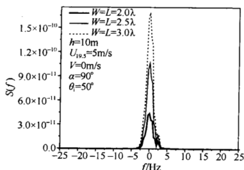


图 6.60　不同平板尺寸下后向复合散射场的多普勒谱

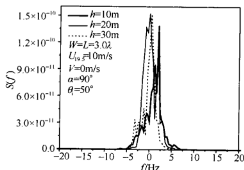


图 6.61　不同平板高度下后向复合散射场的多普勒谱

图 6.62 给出了后向复合散射场的多普勒谱随静止平板倾角的变化情况，计算参数详见图中说明。给出了两组倾角数据，其中，图 6.62(a)中倾角变化范围从小角度 15°变化到 70°，图 6.62(b)中倾角变化范围从大角度 70°变化到 80°，可以发现多普勒谱峰值并不是随倾角单调变化的，在倾角小于 60°时，多普勒谱峰值随倾角增大而减小，在倾角为 60°时最小，在倾角大于 60°时，多普勒谱峰值随倾角增大而增大。这主要是因为在此入射角为 $\theta_i=50°$，参考图 6.49，假如将粗糙面换成平面，那么理论上而言，当倾角 $\alpha=40°$时，此时的平板与介质平面的耦合散射将最小（因为此时入射方向沿着平板方向），而这里计算的是粗糙海面，由于其随机性，平板与海面耦合散射幅值最小值出现在倾角 $\alpha=60°$附近，所以相应的多普勒谱峰值也最小。

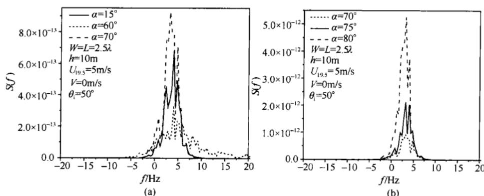


图 6.62 平板不同倾角时的复合散射场的多普勒谱

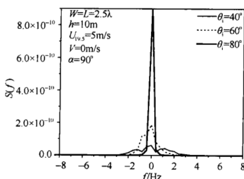


图 6.63 不同入射角下复合散射场的多普勒谱

图 6.63 给出了复合散射场的多普勒谱随入射角的变化情况，其中，计算参数详见图中所示。从图中可以看出复合散射场的多普勒谱峰值随入射角的增大而增大，这主要是因为对于 $\alpha=90°$，当入射角较小时，粗糙海面散射场在总的复合散射场中起主导作用，海面与平板的耦合散射很小，随着入射角的增大，平板一次后向散射场及耦合散射远远大于海面后向散射场，所以，此时的复合散射多普勒谱峰值随之增大。另外，随着入射角度的增大，复合模型后向散射场的多普勒谱主谱瓣谱宽会有所减小[27]。

图 6.64 给出海面散射场的多普勒谱同复合散射场多普勒谱的比较。此时，平板不再静止，运动速度为 10m/s，其他计算参数如图所示。通过图 6.64 可见海面散射场的多普勒谱只有一个峰，而复合散射场的多普勒谱有两个峰，其中，第一个峰(左峰)主要是由海面散射场形成的，而第二个峰(右峰)主要是由平板散射场及耦合散射场形成的。可以看出耦合散射场及平板散射场对第一个峰的影响不大。需要指出的是在图 6.59～图 6.63 中复合散射场的多普勒谱只有一个峰，这主要是由于在图 6.59～图 6.63 中平板的运动速度为零，海面散射场的多普勒谱和耦合散射场的多普勒谱频移基本相同，在图 6.64～图 6.67 中，平板运动速度均不为零。

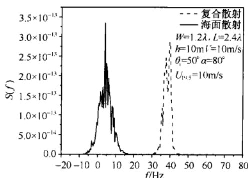


图 6.64　海面散射场及复合散射场的多普勒谱

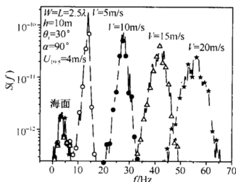


图 6.65　不同平板运动速度下复合散射场的多普勒谱

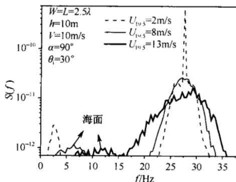


图 6.66　不同风速下复合散射场的多普勒谱

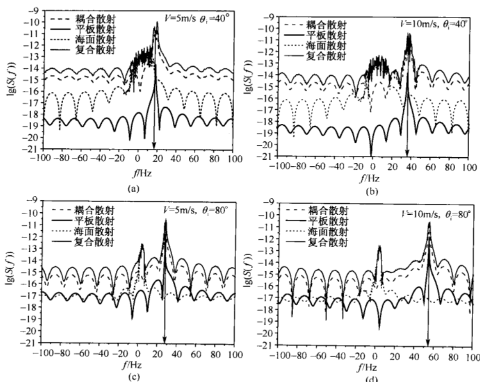


图 6.67　不同入射角和平板速度下后向散射场的多普勒谱分布

图 6.65 给出了平板在不同运动速度下的复合散射场的多普勒谱情况，相关计算参数如图所示。从图中可以看出，随着平板运动速度的增大，复合散射场中由平板一次散射及其与海面的耦合散射场所决定的多普勒谱峰值(右峰)会向着高频方向移动，并且和平板的运动速度成一定的比例，同时，右峰的多普勒谱展宽有所增大，但幅值逐渐减小。这些结论对于实现杂波中的目标检测以及测定目标的运动速度有一定的应用价值。

为了和平板运动速度为零(图 6.59(c))的情况作比较，图 6.66 给出了不同风速下复合散射场的多普勒谱情况，相关计算参数如图所示。从图中可以看出与图 6.59($V=0\text{m/s}$)有所不同的是当平板速度 $V=10\text{m/s}$ 时，此时的多普勒谱出现两个峰值。随着风速的增大，平板的一次散射场及耦合散射场的多普勒谱(右峰)展宽有所增大，这与单纯海面的多普勒展宽变化规律类似。同时，由单纯海面决定的多普勒谱(左峰)频移有逐渐增大的趋势，而由平板的一次散射场及耦合散射场决定的多普勒谱(右峰)频移并不随风速变化而有较大变化。另外，与图 6.59 类似，无论是海面散射的多普勒谱还是耦合散射的多普勒谱，其幅值均随着风速的增大而减小。

图 6.67 给出了不同入射角下，平板运动速度分别为 $V=5\text{m/s}$，10m/s 时各种散射场多普勒谱的情况，其中，平板的中心坐标 $(x_0, y_0, z_0)=(1\text{m}, 0\text{m}, 10\text{m})$，$W=1.8\lambda$，$L=3.0\lambda$，$\alpha=90°$，海面风速 $U_{19.5}=10\text{m/s}$，并且在平行于 xOy 的平面内，沿与 x 轴成 $\pi/6$ 角的方向运动。由图 6.67(a)和(b)可见在入射角为 $\theta_i=40°$时，平板散射场的多普勒谱被海面散射场的多普勒谱所湮没。随着入射角的增大，如图 6.67(c)和(d)所示，当 $\theta_i=80°$时，平板散射场的多普勒谱幅值逐渐增大，并与海面散射场的多普勒谱幅值大小相当，同时，在平板运动速度一定的情况下，耦合散射场及平板散射场的多普勒谱频移(如图中辅助箭头所示)随着入射角的增大而增大。另外，还发现在入射角一定的情况下，随着平板运动速度的增大，耦合散射场及平板散射场的多普勒谱频移也随之增大，从而右边的主瓣(右峰)将与左边的分开，这为目标检测提供了重要的依据。

6.5.2　互易性定理用于求解粗糙海面与其上方尖锥目标的复合电磁散射

1. 等效边缘电磁流方法

等效边缘电磁流(equivalent edge currents, EEC)方法是目前计算电大尺寸复杂目标电磁散射的有效方法之一[28]。该方法假设在劈边缘(沿 $\hat{t}$ 方向)存在电磁流 I 和 M，它并非实际存在的电磁流，因为它随着入射方向、观察方向的变化而有所差异，因此，它只是一种数学处理手段。EEC 方法不是一种射线光学方法，不会产生焦散，因此，可以计算几何绕射理论(geometrical theory of diffraction, GTD)方法失效的焦散区场。

EEC 方法首先需求出劈边缘上的等效电磁流，再由等效电磁流通过如下的辐射积分计算远区散射场：

$$\boldsymbol{E}_s = \mathrm{i}k\int_c \left[\eta_0 I(\boldsymbol{r}')\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{t})+M(\boldsymbol{r}')(\hat{s}\times\hat{t})\right]\frac{\exp(-\mathrm{i}kS)}{4\pi S}\mathrm{d}l \tag{6.143}$$

其中，$k=2\pi/\lambda$ 是入射波的波数，$\eta_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ 是自由空间的特征波阻抗，$\hat{s}$ 表示散射波方向(图 6.68)，$\boldsymbol{r}'$ 是劈边缘上一点的位置矢量，$S=|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$，$\boldsymbol{r}$ 是观察点 P 的位置矢量。图 6.69 给出了劈散射几何示意图，其中，$\hat{s}'$ 为入射波方向，$\hat{t}$ 为劈边缘的切线方向，β' 是入射波与 $-\hat{t}$ 的夹角，β 是散射波方向 $\hat{s}$ 与 $\hat{t}$ 的夹角，φ 是散射方向 $\hat{s}$ 在 xy 平面的投影与 x 轴的夹角，ϕ' 是入射方向 $\hat{s}'$ 在 xy 平面的投影与 x 轴的夹角，$N\pi$ 为外劈角。

EEC 方法是 Millar[28] 在研究口径绕射中提出来的，Ryan 和 Peters[29] 利用其计算了沿旋转体轴向焦散区的场。随后，Michaeli[30] 利用渐近方法且仅保留下限对积分的贡献求解了物理光学电磁流(I,M)，导出了计算任意方向散射场的表达

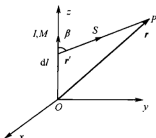


图 6.68　等效电磁流辐射场

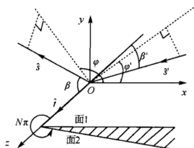


图 6.69　劈散射几何示意图

式，其缺点是存在虚假奇异点，结果基本不能使用，为了对此进行修正，他分别给出了计算边缘绕射场的 EEC 表达式(fringe current components, FCC-EEC)[31]及计算物理光学场的 EEC 表达式(physical optics components, POC-EEC)[32]，鉴于其计算边缘绕射场的 EEC 表达式能够得到较好的绕射场解，本节采用 Michaeli 给出的 FCC-EEC 表达式计算绕射电磁流($I^{\mathrm{FCC}}, M^{\mathrm{FCC}}$)。对于物理光学场的求解，相比之下，利用增量绕射理论计算物理光学场的 EEC 表达式[33]具有较好的属性，在此，利用文献[33]中的 POC-EEC 求解物理光学电磁流($I^{\mathrm{POC}}, M^{\mathrm{POC}}$)。因此，式(6.143)中的 I 和 M 由用于计算物理光学场的 $I^{\mathrm{POC}}, M^{\mathrm{POC}}$ 和边缘绕射场的 I^{FCC}，M^{FCC} 两部分组成，即 $I=I^{\mathrm{POC}}+I^{\mathrm{FCC}}$ 和 $M=M^{\mathrm{POC}}+M^{\mathrm{FCC}}$。

下面首先给出 POC-EEC 求解物理光学电磁流($I^{\mathrm{POC}}, M^{\mathrm{POC}}$)的相关公式：

$$I^{\mathrm{POC}}=\frac{2\mathrm{i}\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}}{k\eta_0\sin^2\beta'}D_{\mathrm{e}}^{\mathrm{POC}}+\frac{2\mathrm{i}\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}}{k\sin\beta'}D_{\mathrm{em}}^{\mathrm{POC}} \tag{6.144}$$

$$M^{\mathrm{POC}}=\frac{2\mathrm{i}\eta_0\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}}{k\sin\beta'\sin\beta}D_{\mathrm{m}}^{\mathrm{POC}} \tag{6.145}$$

$$D_{\mathrm{e}}^{\mathrm{POC}}=\frac{\sin\varphi'\sin\beta' X_1}{X_1^2+Y_1^2}U_1+\frac{\sin(N\pi-\varphi')\sin\beta' X_2}{X_2^2+Y_2^2}U_2 \tag{6.146}$$

$$D_{\mathrm{m}}^{\mathrm{POC}}=-\left\{\frac{\sin\varphi\sin\beta' X_1}{X_1^2+Y_1^2}U_1+\frac{\sin(N\pi-\varphi)\sin\beta' X_2}{X_2^2+Y_2^2}U_2\right\} \tag{6.147}$$

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{em}}^{\mathrm{POC}}=&\frac{(\cos\beta\cos\varphi\sin\beta'+\cos\beta'\cos\varphi'\sin\beta)X_1}{(X_1^2+Y_1^2)\sin\beta}U_1\\&+\frac{(\cos\beta\cos(N\pi-\varphi)\sin\beta'+\cos\beta'\cos(N\pi-\varphi')\sin\beta)X_2}{(X_2^2+Y_2^2)\sin\beta}U_2\end{aligned} \tag{6.148}$$

$$\begin{cases}X_1=\sin\beta\cos\varphi+\sin\beta'\cos\varphi'\\X_2=\cos(N\pi-\varphi)\sin\beta+\cos(N\pi-\varphi')\sin\beta'\\Y_1=\cos\beta-\cos\beta'\\Y_2=Y_1\end{cases} \tag{6.149a}$$

$$\begin{cases} U_1 = U(\pi - \varphi') \\ U_2 = U[(1-N)\pi + \varphi'] \end{cases}, \quad U(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{6.149b}$$

其中，$\boldsymbol{E}_0^i$ 和 $\boldsymbol{H}_0^i$ 分别为 O 点的入射电场和磁场，η_0 为周围介质的波阻抗。在计算边缘绕射场时采用 Michaeli 给出的 FCC-EEC 表达式，具体公式请参见文献[31]。

图 6.70 为圆柱和尖锥的几何形状示意图，其中，圆柱底面半径 $a=5\text{cm}$，长度 $b=15\text{cm}$，尖锥的底面半径 $a=5\text{cm}$，尖锥的圆柱和圆锥长均为 $b=15\text{cm}$。图 6.71 和图 6.72 采用本节给出的 EEC 方法分别计算了圆柱目标和尖锥目标在散射方位角 $\varphi_s=0°$ 平面和散射角 $\theta_s=\pi/2$ 平面内的双站雷达散射截面，其中，入射波沿 $-z$ 方向，电场极化方向沿 x 轴，入射频率为 10GHz。从图中可以看出所采用的方法和矩量法结果有一定的吻合。同时，由于 EEC 方法属于高频方法，其计算速度要比矩量法快得多，并且所需内存也比矩量少很多，在计算目标尤其电大尺寸目标时，较矩量法等数值方法具有较明显的优势。

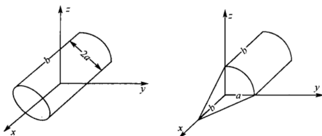


图 6.70　圆柱和尖锥目标散射示意图

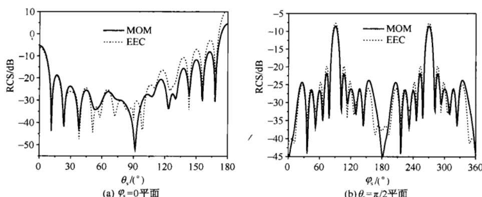


图 6.71　圆柱目标双站雷达散射截面

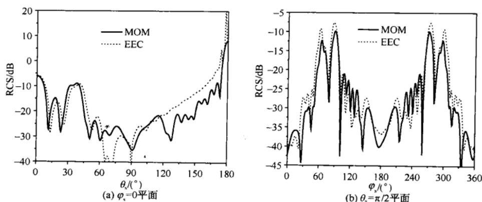


图 6.72　尖锥目标双站雷达散射截面

2. 尖锥目标与海面复合电磁散射的求解

图 6.73 给出了尖锥与海面复合散射的示意图，其中，h 为尖锥目标距离海面的高度。由前面的内容，单纯海面散射场及尖锥目标散射场的表达式可分别参见式(6.95)和式(6.143)。

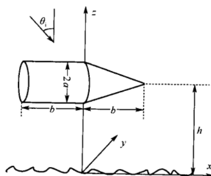


图 6.73　尖锥与海面复合散射示意图

下面给出耦合散射场的计算。水平极化波入射情况下，假设在后方远区 $\boldsymbol{r}_0$ 处有一单位点电流源 $\boldsymbol{J}_e=\hat{\boldsymbol{y}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 和一单位点磁流源 $\boldsymbol{M}_m=-\hat{\boldsymbol{\theta}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$，由它们激发的电场和磁场在远区近似条件下分别为

$$\boldsymbol{E}_{ed}(\boldsymbol{r})=E_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{y}} \tag{6.150}$$

$$\boldsymbol{H}_{md}(\boldsymbol{r})=-H_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{6.151}$$

其中，$E_0=\mathrm{i}kZ_0/(4\pi r_0)\exp(\mathrm{i}kr_0)$，$H_0=\mathrm{i}kY_0/(4\pi r_0)\exp(\mathrm{i}kr_0)$。

首先，用式(6.143)可以得到 $\boldsymbol{E}_{ed}$ 经尖锥目标的一次散射场为 $\boldsymbol{E}^s_{he2c}=\boldsymbol{E}_0(\hat{\boldsymbol{\theta}}E^s_{h\theta}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}E^s_{h\varphi})$，由式(6.100)可知水平极化波入射时海面的表面电流 $\boldsymbol{J}_{rte}$，应用互易性定理可以得到尖锥的二次耦合散射电场为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{E}^s_{h12c}&=\int_S\boldsymbol{J}_{rte}\cdot\boldsymbol{E}^s_{he2c}\mathrm{d}S\\&=\int_S(1-R_{HH})\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{(\cos\theta_i+f'_x\sin\theta_i)}{\sqrt{1+f'^2_x}}\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_i-\mathrm{i}kf\cos\theta_i)\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{E}^s_{he2c}\mathrm{d}S\end{aligned}$$

$$= (1 - R_{\mathrm{HH}}) E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S \frac{(\cos\theta_i + f'_x \sin\theta_i)}{\sqrt{1 + f'^2_x}} \exp(ikx\sin\theta_i - ikf\cos\theta_i)$$

$$(\cos\theta_i \sin\varphi_i E^s_{h\theta} + \cos\varphi_i E^s_{h\varphi}) dS \qquad (6.152)$$

容易得到 $\boldsymbol{H}_{md}$ 经尖锥目标的散射磁场为 $\boldsymbol{H}^s_{hm2c} = H_0(-\hat{\boldsymbol{\theta}} E^s_{h\varphi} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} E^s_{h\theta})$，由式(6.101)知水平极化波入射时海面的表面磁流 $\boldsymbol{M}_{rte}$，应用互易性定理可以得到尖锥的次级散射磁场

$$-\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{H}^s_{h12c} = \int_S \boldsymbol{M}_{rte} \cdot \boldsymbol{H}^s_{hm2c} dS$$

$$= (1 + R_{\mathrm{HH}}) \int_S \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2}} \exp(ikx\sin\theta_i - ikf\cos\theta_i)(\hat{\boldsymbol{x}} + f'_x \hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \boldsymbol{H}^s_{hm2c} dS$$

$$= (1 + R_{\mathrm{HH}}) H_0 \int_S \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2}} \exp(ikx\sin\theta_i - ikf\cos\theta_i)$$

$$\times [f'_x \sin\theta_i E^s_{h\varphi} - (\cos\theta_i \cos\varphi E^s_{h\varphi} + \sin\varphi_i E^s_{h\theta})] dS \qquad (6.153)$$

由式(6.153)可以得到海面磁流在尖锥目标上激发的次级耦合散射电场为 $-\hat{\boldsymbol{y}} Z_0 H^s_{h12c}$，结合式(6.152)可以得到水平极化波入射时尖锥目标的总耦合散射场为 $\hat{\boldsymbol{y}}(E^s_{h12c} - Z_0 H^s_{h12c})$。

对于垂直极化波而言，假设在后方远区 $\boldsymbol{r}_0$ 处有一单位点电流源 $\boldsymbol{J}_e = \hat{\boldsymbol{\theta}} \delta(\boldsymbol{r} - r_0)$ 和单位点磁流源 $\boldsymbol{M}_m = \hat{\boldsymbol{y}} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$，由它们激发的电场和磁场在远区近似条件下分别为

$$\boldsymbol{E}_{ed}(\boldsymbol{r}) = E_0 \exp(i\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r}) \hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (6.154)$$

$$\boldsymbol{H}_{md}(\boldsymbol{r}) = H_0 \exp(i\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r}) \hat{\boldsymbol{y}} \qquad (6.155)$$

其中，$E_0 = ikZ_0/(4\pi r_0)\exp(ikr_0)$，$H_0 = ikY_0/(4\pi r_0)\exp(ikr_0)$。

应用式(6.143)可以得到 $\boldsymbol{E}_{ed}$ 经尖锥目标的一次散射场为 $\boldsymbol{E}^s_{ve2c} = E_0(\hat{\boldsymbol{\theta}} E^s_{v\theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} E^s_{v\varphi})$。由式(6.104)可知垂直极化波入射时海面的表面电流 $\boldsymbol{J}_{rtm}$，应用互易性定理可以得到尖锥的次级散射电场为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{E}v^s_{12c} = \int_S \boldsymbol{J}_{rtm} \cdot \boldsymbol{E}^s_{ve2c} dS$$

$$= -(1 + R_{\mathrm{VV}}) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2}} \exp(ikx\sin\theta_i - ikf\cos\theta_i)(\hat{\boldsymbol{x}} + f'_x \hat{\boldsymbol{z}}) \boldsymbol{E}^s_{ve2c} dS$$

$$= -(1 + R_{\mathrm{VV}}) E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2}} \exp(ikx\sin\theta_i - ikf\cos\theta_i)$$

$$[(\cos\theta_i \cos\varphi E^s_{v\theta} - \sin\varphi_i E^s_{v\varphi}) - f'_x \sin\theta_i E^s_{v\theta}] dS \qquad (6.156)$$

$\boldsymbol{H}_{md}$ 经尖锥目标的散射磁场为 $\boldsymbol{H}^s_{vm2c} = H_0(-\hat{\boldsymbol{\theta}} E^s_{v\varphi} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} E^s_{v\theta})$，由式(6.105)知垂直极化波入射时海面的表面磁流 $\boldsymbol{M}_{rtm}$，应用互易性定理可以得到尖锥的次级散射

磁场为

$$\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{H}^{s}_{v12c}=\int_{S}\boldsymbol{M}_{rtm}\cdot\boldsymbol{H}^{s}_{vm2c}\mathrm{d}S$$
$$=(1-R_{VV})\int_{S}\frac{\cos\theta_i+f'_x\sin\theta_i}{\sqrt{1+f_x^2}}\exp(\mathrm{i}ky\sin\theta_i-\mathrm{i}kf\cos\theta_i)\,\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{H}^{s}_{vm2c}\mathrm{d}S$$
$$=(1-R_{VV})H_0\int_{S}\frac{\cos\theta_i+f'_x\sin\theta_i}{\sqrt{1+f'^2_x}}\exp(\mathrm{i}ky\sin\theta_i-\mathrm{i}kf\cos\theta_i)$$
$$(-\cos\theta_i\sin\varphi_i E^{s}_{v\varphi}+\cos\varphi_i E^{s}_{v\theta})\mathrm{d}S \tag{6.157}$$

由式(6.157)可得到海面磁流在尖锥目标上激发的二次耦合散射电场$-\hat{\boldsymbol{\theta}}Z_0H^{s}_{v12c}$，结合式(6.156)可以得到垂直极化波入射下尖锥目标总的二次耦合散射场$\hat{\boldsymbol{\theta}}(E^{s}_{v12c}-Z_0H^{s}_{v12c})$。关于总散射场及多普勒谱的求解，具体可参见式(6.137)～式(6.142)。

图6.74给出了如图6.73所示的尖锥在距海面高度为150cm时，与海面的耦合散射截面及后向复合散射截面，其中，粗糙海面的统计样本数为20，入射波频率为10GHz，海面长度为200m，海面风速为5m/s，海面的相对介电常数为(61.0,33.0)。

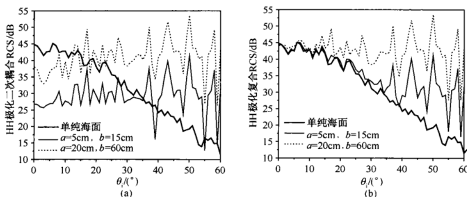


图6.74　不同尺寸尖锥目标的后向耦合及复合散射截面

从图6.74中可以看出对于同一尺寸尖锥，在小角度入射时，由于尖锥与海面的耦合散射作用较小，海面的一次散射场在总散射场中起主导作用，很难将目标从海面中分离出来。随着入射角的增大，海面散射场减小，尖锥与海面的耦合散射作用随之增大，耦合散射场在总散射场中起主导作用，复合散射场远大于单纯海面的一次散射场。对比不同尺寸尖锥的情况可以发现随着尖锥尺寸的增大，尖锥与海面的耦合散射作用增强，因而总的复合散射越大。从图中还可以看出复合散射截面跟单纯目标一样随入射角呈振荡变化，这是散射场相位存在叠加相消的原因。

图 6.75 和图 6.76 分别给出了海面与尖锥目标的后向复合散射截面及后向耦合散射截面随海面风速的变化情况，其中，各参数同图 6.74。从图中可以看出随着风速的增大，单纯海面的散射截面明显增大，这主要是因为随着风速的增大，海面的粗糙度增大，非相干散射增强，因而海面的后向散射截面随着风速的增大而增强。对于复合散射场而言，随着风速的增加，除了小角度下的情况外，在大、中角度下，复合散射场随风速的变化不是很明显。这主要是因为小角度下单纯海面的散射场在总的复合散射场中起主导作用，所以复合散射截面随风速的增大而增大；大角度时，海面散射场减小，目标与海面的二次耦合散射场起主导作用，同时，从图 6.76 可以发现风速对耦合散射场的影响并不大，所以图 6.75 中大角度下风速对总的复合散射截面影响也就不很明显。

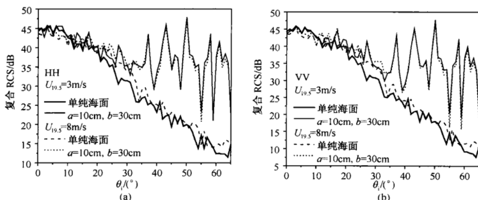


图 6.75　不同风速下的海面后向和复合散射截面

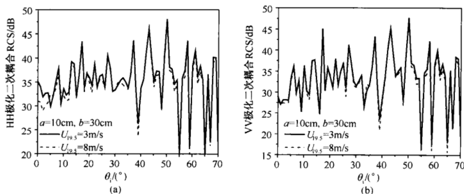


图 6.76　不同风速下的后向二次耦合散射截面

图 6.77 给出了尖锥与海面后向复合散射截面随尖锥距海面高度的变化，其他有关参数同图 6.74。从图中可以看出后向复合散射截面幅值并没有随目标高度

的增大而单调减小，而是呈振荡变化，并且随着入射角的增大，振荡程度也在增大，这主要是因为当入射角较小时，尖锥目标与海面的一次散射场在后向复合散射场中的比重较大，几乎决定了总场的大小，因此，在小角度入射情况，总的后向散射截面幅值随高度变化的振荡程度较小。随着入射角的增大，海面及尖锥目标的一次散射场和它们之间的二次耦合散射场共同决定了复合散射场的大小，同时又因为目标高度的变化对目标本身的一次散射场及其与海面的二次耦合散射场相位变化的影响不一致，出现叠加相消的现象，所以此时后向散射截面幅值随高度变化的振荡程度较大。另外，通过观察还可以发现无论入射角大小，总的后向散射截面幅值随着目标高度的增加均是减小的，这主要是因为随着高度的增加，尖锥目标和海面之间的耦合作用减小，因此，后向复合散射截面随高度的增加总体趋势是减小。

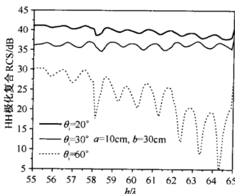


图 6.77　后向复合散射截面随尖锥距海面高度的变化

图 6.78 给出了不同风速下海面散射场及其与尖锥复合散射场的多普勒谱，其中，极化方式为水平极化，尖锥尺寸为 a=5cm，b=15cm，入射角 θ_i=40°，其他参数同图 6.74。图 6.78(a)是单纯海面散射场的多普勒谱分布。随着海面风速的增大，表面水层的运动速度及大尺度波浪轨道运动速度都有所增大，可以看出，多普勒频移有逐渐增大的趋势，同时多普勒谱瓣有所展宽，这主要是因为随着海面粗糙度的增大，非相干散射更加显著，散射回波的能量向更多频率展宽。图 6.78(b)给出了复合散射场的多普勒谱，可以看出复合散射场的多普勒谱频移随着风速的增大未有明显改变，但多普勒谱瓣有所展宽。总体而言，无论是海面散射的多普勒谱或者复合散射场的多普勒谱，其幅值均随着风速的增大有所减小。

图 6.79 给出了后向复合散射场的多普勒谱随尖锥尺寸的变化，其中，尖锥尺寸如图所示，海面风速为 7m/s，其他参数同图 6.78。从图中可以看出随着尖锥尺寸的增大，后向复合散射场增强，因而其多普勒谱幅值也会随之增大。

图 6.80 给出了海面散射场和复合散射场的多普勒谱频宽随入射角的变化，图 6.81 给出了不同入射角下后向散射场的多普勒谱比较(HH 极化)。两图中尖锥尺寸均为 a=5cm，b=15cm，其他参数同图 6.79。从图 6.80 可以看出，随着入射角的增大，海面散射场的多普勒谱频宽先增大后减小，这与文献[34]的结论相一致。同样还可以看出复合散射场多普勒谱的变化规律也类似于海面散射场。

从图 6.81 可以看出在小入射角 θ_i=20°时，耦合散射场的多普勒谱幅值很小，

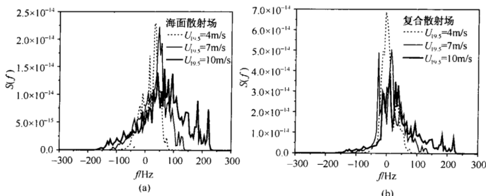


图 6.78　不同风速下后向散射场的多普勒谱

复合散射场与海面散射场的多普勒谱幅值基本重合。随着入射角增大到$\theta_i=40°$时，耦合散射场的多普勒谱幅值相对增大，复合散射场的多普勒谱幅值明显大于海面散射场的多普勒谱幅值；在入射角 $\theta_i=60°$时，耦合散射场和复合散射场的多普勒谱幅值均远大于海面散射场的多普勒谱幅值，因而可以得出以下结论：在小入射角下，海面散射场的多普勒谱与复合散射场的多普勒谱相接近，此时海面散射场对复合散射场起

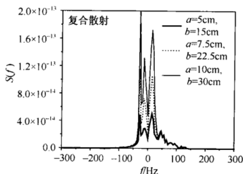


图 6.79　后向复合散射场的多普勒谱随尖锥尺寸的变化

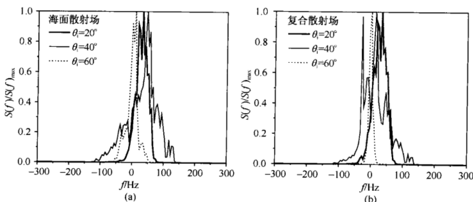


图 6.80　海面散射场和复合散射场多普勒谱频宽随入射角的变化

主导作用,这并不利于将目标信息从海面多普勒谱中提取出来;随着入射角的增大,耦合散射场对复合散射场的贡献逐渐增大,因此,在大入射角下更有利于海上目标的检测与识别。

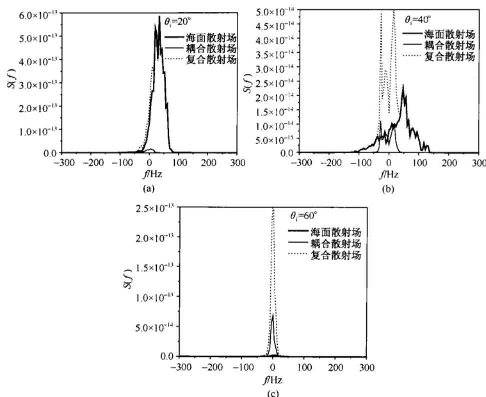


图 6.81　不同入射角时后向散射场的多普勒谱比较

参 考 文 献

[1] Wang X, Wang C F, Gan Y B. Electromagnetic scattering from a circular target above or below rough surface. Progress In Electromagnetics Research, 2003, 40: 207～227.

[2] 焦培南，张忠治．雷达环境与电波传播特性．北京：电子工业出版社，2007.

[3] Wang J R, Schmugge T J. An empirical model for the complex dielectric permittivity of soils as a function of water content. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 1980, 18(4): 288～295.

[4] Jakobus U, Landstorfer F M. Improvement of the PO-MM hybrid method by accounting for effects of perfectly conducting wedges. IEEE Trans Antennas Propagat, 1995, 43(10): 1123～1129.

[5] 王蕊，郭立新，秦三团等．粗糙海面及其上方导体目标复合电磁散射的混合算法研究．物理学报，2008, 57(6): 3473～3480.

[6] 叶红霞，金亚秋．随机粗糙面上目标散射差值计算的快速互耦迭代方法．电子学报，2006，34(6)：1074 ～1079.

[7] Li J，Guo L X，Zeng H. FDTD investigation on the electromagnetic scattering from a target above a randomly rough sea surface. Waves in Random and Complex Media，2008，18(4)：641～650.

[8] Ulaby F T，Moore R K，Fung A K. Microwave Remote Sensing. London：Addison-Wesley Publishing，1982.

[9] Li J，Guo L X，Zeng H. FDTD investigation on bistatic scattering from a target above two-layered rough surfaces using upml absorbing condition. Progress In Electromagnetics Research，2008，88：197～211.

[10] Li J，Guo L X，Zeng H. FDTD investigation on bistatic scattering from two-dimensional rough surface with UPML absorbing condition. Waves in Random and Complex Media，2009，19(3)：418～429.

[11] Fung A K，Lee K K. A semi-empirical sea spectrum model for scattering coefficient estimation. IEEE Journal of Oceanic Engineering，1982，7(4)：166～176.

[12] Cox C，Munk W. Measurement of the roughness of the sea surface from photographs of the sun glitter. J Opt Soc Am，1954，44(11)：838～859.

[13] 郭立新，王运华，吴振森．修正双尺度模型在非高斯海面散射中的应用．电波科学学报，2007，22(2)：212～218.

[14] Jin Y Q. Some results from the radiative wave equation for a slab of randomly，densely distributed scatters. J of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer，1988，39(2)：83～98.

[15] 梁玉，郭立新．气泡/泡沫覆盖粗糙海面电磁散射的修正双尺度法研究．物理学报，2009，58(9)：6158～6166.

[16] Monahan E C，MacNiocaill G. Oceanic Whitecaps and Their Role in Air-Sea Exchange Process. Boston：D. Reidel，1986.

[17] Daley J C，Ransome J T，Burkett J A. Radar Sea Return-JOSS I. Washington：Nav Res Lab，1971.

[18] Wu S T，Fung A K. A noncoherent model for microwave emissions and backscattering from the sea surface. Journal of Geophysical Research，1972，77(30)：5917～5927.

[19] Kong J A. Electromagnetic Wave Theory. New York：Wiley & Sons，2000.

[20] Sarabandi K，Polatin P F. Electromagnetic scattering from two adjacent objects. IEEE Trans Antennas Propagat，1994，42(4)：510～517.

[21] Johnson J T，Toporkov J V，Brown G S. A numerical study of backscattering from time-evolving sea surfaces：Comparison of hydrodynamic models. IEEE Trans Geosci Remote Sensing，2001，39(11)：2411～ 2420.

[22] Chiu T，Sarabandi K. Electromagnetic scattering interaction between a dielectric cylinder and slightly rough surface. IEEE Trans Antenna and Propagat，1999，47(5)：902～913.

[23] Chao J C，Rizzo F J，Elshafiey I et al. General formulation for light scattering by a dielectric body near a perfectly conducting surface. J Opt Soc Am A，1996，13(2)：338～344.

[24] 郭立新，王运华，吴振森．二维导体微粗糙面与其上方金属平板的复合电磁射研究．物理学报，2005，54(11)：5130～5139.

[25] Wang R，Guo L X. Study on EM scattering from the time-varying lossy dielectric ocean and a moving conducting plate above it. J Opt Soc Am A，2009，26(3)：517～529.

[26] Rozenberg A D，Quigley D C，Melville W K. Laboratory study of polarized micro-wave scattering by surface waves at grazing incidence. Part I-wind waves. IEEE Trans Geosci Remote Sensing，1995，33

(4): 1037～1046.
[27] Bass F, Fuks I, Kalmykov A et al. Very high frequency radiowave scattering by a disturbed sea surface. IEEE Trans Antennas Propagat, 1968, 16(5): 554～568.
[28] Millar R F. An approximate theory of the diffraction of an electromagnetic wave by an aperture in plane screen. Proc IEE, 1956, 103(Part C): 177～185.
[29] Ryan C E, Peters L. Evalution of egde diffracted fields including equivalent currents for caustic regions. IEEE Trans Antennas Propagat, 1969, 17(3): 292～299.
[30] Michaeli A. Equivalent edge currents for arbitrary aspects of observation. IEEE Trans Antennas Propag, 1984, 32(3): 252～258.
[31] Michaeli A. Elimination of infinite in equivalent edge currents. Part I: fringe current components. IEEE Trans Antennas Propagat, 1986, 34(7): 912～918.
[32] Michaeli A. Elimination of infinities in equivalent edge currents. Part 11: physical optics components. IEEE Trans Antennas Propagat, 1986, 34(8): 1034～1037.
[33] 崔索民,吴振森,方大纲等. 一种计算多面体目标 RCS 的等效边缘电磁流公式. 微波学报, 1997, 3(1): 20～25.
[34] Toporkov J V, Brown G S. Numerical simulations of scattering from time-varying, randomly rough surfaces. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 2000, 38(4): 1616～1625.

第7章 粗糙面电磁散射的相关逆问题

本书前几章系统介绍了粗糙面建模方法、粗糙面电磁散射以及粗糙面与目标的复合电磁散射,这些研究均属于粗糙面电磁散射特性的正问题范畴,而粗糙面逆散射问题同样具有重要的学术价值和广泛的应用前景。粗糙面的逆散射问题研究主要可以分为两类:一类是根据粗糙面的散射场测量数据重构粗糙面,另一类是根据粗糙面的平均散射强度数据反演粗糙面的统计参数。本章基于频域和时域条件下一维导体粗糙面逆散射算法,并针对分数布朗运动粗糙面和高斯粗糙面,给出了反演和重构分维数、均方根高度和相关长度的有关算法模型,讨论了遗传算法、粒子群优化以及神经网在粗糙海面逆散射、粗糙面与目标复合散射建模中的应用。

7.1 基于空间场重构理论的粗糙面逆散射算法

粗糙面散射理论在微波遥感、探地雷达和光学无损检测等方面有重要的应用,在以往的研究中多侧重于用计算电磁学的理论构造精确、高效的粗糙面电磁散射计算方法,在已知入射条件和粗糙面轮廓的情况下,这些方法能够获得精确的计算结果。然而,在实际应用中常常需要解决粗糙面的逆散射问题。在已知入射条件和获得一定数量的散射场测量数据的情况下,如何确定粗糙面的轮廓和位置。这方面较早的研究工作[1,2]是根据测量场数据来构造目标函数,然后采用优化技术极小化目标函数。极小化目标函数的目的是使计算出来的散射场的理论值与实际测量值尽可能接近。因此,为了求解目标函数的极小值,必须在每一次迭代的过程中利用粗糙面散射理论求解散射场的理论值。总的来说,借助于优化理论重构粗糙面的方法是一种解决粗糙面逆散射问题的间接方法。由于粗糙面散射的数值计算方法本身计算量较大,而且现有的能够求解全局极值问题的优化算法收敛速度比较慢,所以这种间接的求解逆散射的方法对计算量的要求较高,粗糙面的重构效率较低。

除了借助于优化技术构造粗糙面逆散射算法外,国内外学者对粗糙面逆散射理论的非迭代算法作了一定的研究。Potthast[3,4]曾经从数学的角度就一般问题的电磁场边界条件逆问题的唯一解作出证明,证明了点辐射源激励条件下的电磁逆散射问题具有唯一解,但是到目前为止,Potthast 所从事的研究工作只给出了非常基础性的数学论证,尚未给出一种明确的逆散射算法。由于任意天线的辐射场都可以看成由不同位置的点源激励场叠加而成,因此,研究点源激励下的粗糙面逆

散射问题具有普遍的应用价值。本节提出一种新的逆散射算法，即根据点源位置和测量场数据建立积分方程来重构二维空间的场分布，进一步根据重构后的空间场和边界条件确定导体粗糙面的轮廓和位置。其主要思路是：首先，用半空间格林函数代替自由空间格林函数作为亥姆霍兹方程的基本解，将二维空间的总场分解成半空间格林函数和散射场之和；然后，从半空间格林函数满足的第一类积分方程出发，推导出二维空间重构场的积分表达式；最后，通过寻找空间重构场趋于 0 的位置来确定导体粗糙面的边界位置。

7.1.1 频域逆散射算法

1. 半空间格林函数

如图 7.1 所示，点源天线位于粗糙面上方 $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0)$ 处，辐射出的水平极化的时谐电磁波入射到一维导体粗糙面上，一维粗糙面的轮廓由函数 $y_f=f(x)$ 描述。粗糙面上方的空间记作 V_0，将水平线 $y=f_h$ 设定为测量场水平线，电磁测量系统可以沿着此水平线等间距地测量出有限数量的电场值。

图 7.1 时谐波逆散射示意图

由点源天线激发的入射电场为

$$E^i = \Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|) \tag{7.1}$$

其中，$\Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$表示二维自由空间的格林函数，$k$ 是自由空间的波数。

在 V_0 中，粗糙面的散射场 E^s 满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 E^s + k^2 E^s = 0 \tag{7.2}$$

散射场 E^s 在粗糙面边界 $y_f=f(x)$上满足边界条件

$$E^s + \Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = 0 \tag{7.3}$$

在 V_0 中，总电场可以写成入射电场和散射场之和，即

$$E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = E^s(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) + \Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) \tag{7.4}$$

在粗糙面散射问题的研究中，通常从时谐电磁波满足的亥姆霍兹方程出发，将由格林定理求得的分界面上的积分方程转化为表面电场及其导数为未知量的线性方程，并对其进行数值求解[5]。所建立的积分方程也是基于自由空间格林函数的第一类积分方程。尽管第一类积分方程在计算过程中具有较好的稳定性和可操作性，但是在求解逆散射问题时，很难直接通过自由空间格林函数建立稳定的逆散射算法。引入半空间格林函数作为亥姆霍兹方程的基本解，其目的是方便推导二维空间重构场的积分表达式。在点源的位置 $\boldsymbol{r}_0$ 的镜像点 $\boldsymbol{r}'_0$ 处引入镜像点源，由镜像点源激励的电场记作 $\Phi'(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=-\Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'_0)$，那么粗糙面的散射场 E^{s} 可以分解成以下两项：

$$E^{\mathrm{s}} = E^{\mathrm{u}} + \Phi'(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) \tag{7.5}$$

其中，E^{u} 是未知的散射场。将式(7.5)代入式(7.3)，式(7.3)的边界条件可以简化为

$$E^{\mathrm{u}}(\boldsymbol{r}) = -\{\Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) - \Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'_0)\} = -G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) \tag{7.6}$$

其中，$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$表示上半空间格林函数。由于 E^{u} 也满足方程(7.2)的亥姆霍兹方程，所以有关 E^{s} 的边界值问题就转化成了有关 E^{u} 的等效边界值问题。因此，上半空间 V_0 中的总电场可以重新表示成半空间格林函数 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$和未知散射场 E^{u} 之和，即

$$E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = E^{\mathrm{u}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) + G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) \tag{7.7}$$

在粗糙面逆散射问题中，只要能由测量数据求解出散射场 E^{u}，就可以通过方程(7.7)来重构二维空间的总电场。

2. 二维空间重构场

粗糙面的逆散射问题可以描述为

已知 N_{r} 个测量电场数据 $E^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}},\boldsymbol{r}_0)$，其中，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 分别是测量点和点源的位置矢量，测量点位于粗糙面上方的测量场水平线 $y=f_{\mathrm{h}}$ 处，未知粗糙面的轮廓函数 $y_{\mathrm{f}}=f(x)$。

下面将详细阐述如何由已知的测量电场数据重构出二维空间的总电场。导体粗糙面上方的总电场满足如下互易性关系：

$$E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = E(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}) \tag{7.8}$$

根据式(7.8)只要能由测量数据重构出 $E(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})$，便可以获得二维空间的总电场。假设描述粗糙面轮廓的连续函数 $y_{\mathrm{f}}=f(x)$满足 $f_-\leqslant f(x)\leqslant f_+$，其中，$f_-$ 和 f_+ 是求解粗糙面逆散射问题时的预先估计值。在求解逆散射问题的时候，要根据具体的情况初步估计一下粗糙面轮廓的取值范围。一般来说，应该选择足够大的范围，以便待求的粗糙面轮廓位于其中。实际应用中，可以根据一些具体的情况估计出粗糙面轮廓的一个大概的取值范围，f_- 和 f_+ 便是这个取值范围的下限和上

限，因此，f_- 和 f_+ 并不一定是粗糙面轮廓的最小值和最大值。f_- 和 f_+ 的取值与具体的坐标系有关，为了构造一种方便适用的时域逆散射算法，选取合适的坐标系使得 $|f_-|=|f_+|$。在粗糙面逆散射问题中，粗糙面的轮廓函数 $y_f=f(x)$ 是待求量，因此，不能对 $\boldsymbol{r}\in\{(x,y_f)\,|\,x\in\mathbf{R}\}$ 的情况直接建立逆散射方程。相反，本节假定粗糙面轮廓位于 $y=f_+$ 和 $y=-f_+$ 之间的管形区域 V_1，并对区域 V_1 的边界 $y=f_+$ 处的半空间格林函数展开讨论。考虑半空间格林函数满足的第一类积分方程[6]

$$\int_{f_h} G_1(\boldsymbol{r}_\gamma,\boldsymbol{r}_h)\phi_\gamma(\boldsymbol{r}_h)\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h)=G_1(\boldsymbol{r}_\gamma,\boldsymbol{r}) \tag{7.9}$$

其中，$G_1(\boldsymbol{r}_\gamma,\boldsymbol{r})$ 是由式(7.6)定义的半空间格林函数，$\boldsymbol{r}_\gamma$ 是位于粗糙面上方水平位置 $y=f_+$ 处的位置矢量，$\boldsymbol{r}$ 代表区域 V_0 中的一点，微分线元 $\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h)$ 定义为 $\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h)=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}f_h}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$。将方程(7.9)改写成算符的形式，即

$$K\phi_\gamma=G_1(\boldsymbol{r}_\gamma,\boldsymbol{r}) \tag{7.10}$$

积分算符 K 定义为

$$K\phi_\gamma=\int_{f_h} G_1(\boldsymbol{r}_\gamma,\boldsymbol{r}_h)\phi_\gamma(\boldsymbol{r}_h)\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h) \tag{7.11}$$

从严格的数学角度来说，方程(7.10)属于病态积分方程，然而在实际计算过程中可以用 Tikhonov 正则化方法[7]找到一个逼近解 ϕ_γ^α 有限维地逼近方程(7.10)的准确解，即

$$\alpha\phi_\gamma^\alpha+K^*K\phi_\gamma^\alpha=K^*G_1(\boldsymbol{r}_\gamma,\boldsymbol{r}) \tag{7.12}$$

其中，算符 K^* 是 K 的共轭算符，α 是相应的正则化参数。

定义方程(7.9)等号左边和右边的差值为

$$u(\boldsymbol{r}_\beta)=\int_{f_h} G_1(\boldsymbol{r}_\beta,\boldsymbol{r}_h)\phi_\gamma^\alpha(\boldsymbol{r}_h)\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h)-G_1(\boldsymbol{r}_\beta,\boldsymbol{r}) \tag{7.13}$$

其中，$\boldsymbol{r}_\beta(x_\beta,y_\beta)$ 位于区域 V_0。将方程(7.12)求得的逼近解 $\phi_\gamma^\alpha(\boldsymbol{r}_h)$ 代入方程(7.13)，即可求出差值函数 $u(\boldsymbol{r}_\beta)$ 的值。由方程(7.9)知当位置矢量 $\boldsymbol{r}_\beta$ 位于粗糙面上方水平位置 $y=f_+$（即 $\boldsymbol{r}_\beta=\boldsymbol{r}_\gamma$）时，$u(\boldsymbol{r}_\beta)$ 趋近于 0。通过数值计算发现当 $\boldsymbol{r}_\beta\in V_1$ 时，$|u(\boldsymbol{r}_\beta)|$ 随 $\boldsymbol{r}_\beta$ 变化比较缓慢，$|u(\boldsymbol{r}_\beta)|$ 在 V_1 内部的值要小于其在 V_1 边界处的值。在图 7.2 中，分别对 $\boldsymbol{r}$ 位于$(0.5\lambda,0.6\lambda)$和$(-6\lambda,0.4\lambda)$的情况，给出了函数 $|u(\boldsymbol{r}_\beta)|$ 随 x_β/λ 和 y_β/λ 的变化曲线，其中，$|f_-|=|f_+|=4\lambda$，粗糙面的尺度参数均以入射波长 λ 作为归一化单位。从图中可以看出 $|u(\boldsymbol{r}_\beta)|$ 随 $\frac{x_\beta}{\lambda}$ 的变化均比较缓慢。在图 7.2(a)和 7.2(b)中，$|u(\boldsymbol{r}_\beta)|$ 的最大值均在区域 V_1 的边界 $y=f_+$ 和 $y=f_-$ 处取得。这表明由方程(7.11)求得的逼近解 $\phi_\gamma^\alpha(\boldsymbol{r}_h)$，不仅能够保证 $|u(\boldsymbol{r}_\beta)|$ 在 V_1 的边界 $y=f_+$ 和 $y=f_-$ 上取得足够小的值，而且能够保证 $|u(\boldsymbol{r}_\beta)|$ 在粗糙面

$y_f=f(x)$上足够小。

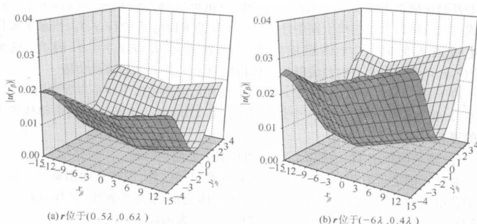


图 7.2　差值函数$|u(\boldsymbol{r}_\beta)|$随$x_\beta$和$y_\beta$的变化关系

在方程(7.13)中将$G_1(\boldsymbol{r}_\beta,\boldsymbol{r})$用$E^u(\boldsymbol{r}_\beta,\boldsymbol{r})$代替,可以得到另一个差值函数

$$w(\boldsymbol{r}_\beta)=\int_{f_h}E^u(\boldsymbol{r}_\beta,\boldsymbol{r}_h)\phi_\gamma^\alpha(\boldsymbol{r}_h)\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h)-E^u(\boldsymbol{r}_\beta,\boldsymbol{r}) \tag{7.14}$$

$w(\boldsymbol{r}_\beta)$在区域V_0中也满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 w(\boldsymbol{r}_\beta)+k^2 w(\boldsymbol{r}_\beta)=0,\quad \boldsymbol{r}_\beta\in V_0 \tag{7.15}$$

并在粗糙面边界$y_f=f(x)$处满足边界条件

$$w(\boldsymbol{r}_\beta)=-u(\boldsymbol{r}_\beta) \tag{7.16}$$

由前面的讨论可知根据方程(7.12)求得的逼近解ϕ_γ^α能够使得$-u(\boldsymbol{r}_\beta)$在粗糙面$y_f=f(x)$上趋近于0,所以式(7.16)的边界条件可以近似写成

$$w(\boldsymbol{r}_\beta)\approx 0 \tag{7.17}$$

从而式(7.14)简化为

$$E^u(\boldsymbol{r}_\beta,\boldsymbol{r})\approx\int_{f_h}E^u(\boldsymbol{r}_\beta,\boldsymbol{r}_h)\phi_\gamma^\alpha(\boldsymbol{r}_h)\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h) \tag{7.18}$$

将式(7.18)代入式(7.7)中,并利用式(7.8)的互易性关系得到

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)&=E(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})=G_1(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})+E^u(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})\approx G_1(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})\\&\quad+\int_{f_h}E^u(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_h)\phi_\gamma^\alpha(\boldsymbol{r}_h)\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h)=G_1(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})\\&\quad+\int_{f_h}(E^m(\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{r}_0)-G_1(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_h))\phi_\gamma^\alpha(\boldsymbol{r}_h)\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h)\end{aligned} \tag{7.19}$$

将二维空间的总电场$E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$的重构场记作$E^\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$,其积分表达式为

$$E^\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=G_1(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})+\int_{f_h}(E^m(\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{r}_0)-G_1(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_h))\phi_\gamma^\alpha(\boldsymbol{r}_h)\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h),\quad \boldsymbol{r}\in V_0 \tag{7.20}$$

式(7.20)中,$G_1(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})$是半空间格林函数,$\boldsymbol{r}_0$ 是点源的位置矢量,$E^m(\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{r}_0)$是粗糙面上方测量场水平线 $y=f_h$ 上的一系列的测量电场,$\phi_\gamma^\alpha(\boldsymbol{r}_h)$由式(7.12)求得。通过式(7.20)可以求得二维空间中任何位置 $\boldsymbol{r}$ 处的重构电场 $E^\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$。当水平极化的电磁波入射时,在导体粗糙面的边界处满足 $E(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=0$,因此,只要 $|E^\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)|$取得最小值的位置就是导体粗糙面 $y_f=f(x)$的轮廓的位置。

对于每一个确定的位置矢量 $\boldsymbol{r}$,重构电场都可以通过以下两个步骤求得:

(1)将方程(7.9)离散成一个线性系统,用 Tikhonov 正则化方法求得线性方程的逼近解 ϕ_γ^α;

(2)将求得的 ϕ_γ^α 代入式(7.20),求得位置 $\boldsymbol{r}$ 处的重构场。

对于二维空间的不同的位置矢量重复步骤(1)和(2),即可重构出整个二维空间的总电场,根据水平极化的电磁波在良导体表面的边界条件,寻找重构电场$|E^\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)|$趋于 0 的位置就可以确定粗糙面的轮廓函数 $y_f=f(x)$。

3. 数值计算与讨论

为了检验本节算法的正确性,下面对微粗糙、中等粗糙的良导体粗糙面的逆散射问题进行计算机数值仿真,所用到的测量数据 $E^m(\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{r}_0)$是通过本书前面章节中介绍的矩量法离散磁场积分方程计算求得。其求解过程如下:首先,用蒙特卡罗方法生成一个粗糙面样本,以步长 $\Delta x=0.1\lambda$ 离散化长度为 $L=1000\lambda$ 的粗糙面,然后用矩量法求解粗糙面上方 $y=f_h=10\lambda$ 处 100 个等间距分布的散射场数据作为逆散射模型的“测量场”。获得测量数据 $E^m(\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{r}_0)$的过程是一个粗糙面散射的过程,在已知测量场数据的情况下,按照所提出的逆散射算法的步骤对粗糙面轮廓进行重构。为了简化逆散射模型,选取粗糙面均值的位置作为 y 轴的零点,选取入射波长 λ 作为归一化单位,点源天线位于粗糙面上方 $\boldsymbol{r}_0(0,15\lambda)$处。方程(7.12)的正则化参数为 $\alpha=10^{-5}$,预先估计粗糙面轮廓满足 $-4\lambda\leqslant f(x)\leqslant 4\lambda$。在逆散射模型中,仅对粗糙面长度 $L^a=30\lambda$ 范围内的一维粗糙面进行重构。

假定粗糙面由一个确定的周期性函数描述,即

$$f(x)=\lambda\sin\left(\frac{\pi x}{7\lambda}\right),\quad |x|\leqslant 500\lambda \tag{7.21}$$

图 7.3 给出了实际粗糙面和用本节方法重构后的粗糙面,其中,实线代表实际粗糙面,虚线代表重构后的粗糙面,粗糙面的横纵坐标均以波长 λ 为单位。通过比较可以看出在大部分区域中,重构后的粗糙面和实际粗糙面吻合得较好,只有在距离点源较远的地方或者粗糙面有尖峰的位置存在较小的误差。在第二个计算实例中检验了非周期粗糙面的重构问题,假设粗糙面由下面的连续函数描述,即

$$f(x)=\lambda\sin\left(\frac{\pi x}{9\lambda}\right)+\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{29\pi x}{75\lambda}\right),\quad |x|\leqslant 500\lambda \tag{7.22}$$

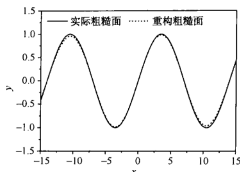


图 7.3　周期性粗糙面的重构

图 7.4 比较了实际粗糙面和重构后的粗糙面，其结果与图 7.3 基本一致。可以看出本节的方法对于由确定函数描述的粗糙面具有较高的重构精度。

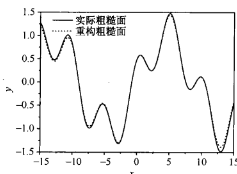


图 7.4　非周期性粗糙面的重构

在实际应用中，很多粗糙面无法用一个确定的函数描述，因此，研究随机分布的不规则粗糙面轮廓的重构具有更重要的意义。本节进一步讨论了由高斯自相关函数描述的随机粗糙面的逆散射问题。测量场数据仍然是通过矩量法对实际粗糙面求解散射场的方法获得，其他计算参数的取值与图 7.3 和图 7.4 相同。在图 7.5 中，检验了不同粗糙程度的两组高斯粗糙面的重构结果，粗糙面的相关长度分别为 $l=4\lambda$（图 7.5(a)）和 $l=3\lambda$（图 7.5(b)），均方根高度分别为 $\delta=0.3\lambda$（图 7.5(a)）和 $\delta=0.6\lambda$（图 7.5(b)）。通过比较可以看出在不考虑测量数据误差的情况下，本节的逆散射算法对高斯随机粗糙面具有较好的重构精度，尤其是对于均方根高度较小的随机粗糙面，粗糙面重构的效果要更好。对于粗糙程度较大的粗糙面，可以通过增加测量数据的个数来提高重构算法的计算精度。

另外，考虑到实际应用中，测量数据会存在一定的测量误差，因此，有必要在数值仿真的过程中考虑误差的影响。假定频域测量电场的幅度和相位均存在一个均

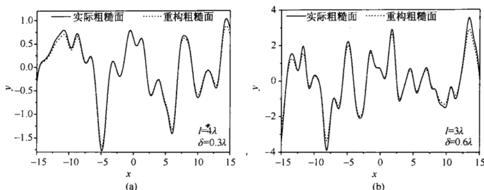


图 7.5　高斯随机粗糙面的重构

匀分布的相对误差，在图 7.6 中，虚线表示测量电场的幅度和相位的相对测量误差为 0～2%的均匀分布的随机变量，带点的实线则表示测量电场的幅度和相位的相对测量误差为 0～4%的均匀分布的随机变量，其他各项计算参数与图 7.5 相同。通过比较可以看出粗糙面的均方根高度越小，重构算法受测量误差的影响越小。另外，图 7.6(a)表明即使测量数据存在较大的测量误差，重构粗糙面和实际粗糙面也基本一致。在图 7.6(b)中，由于粗糙面的均方根高度较大，因此，重构效果受误差的影响也较大，但仍然能够重构出实际粗糙面的大致轮廓。从图中还可以看出在考虑测量误差的情况下，粗糙面上的精细结构（如尖峰）的重构效果受到一定的影响。高斯随机粗糙面是采用谐波叠加的原理[8]生成的，粗糙面上的精细结构主要是由高频谐波分量叠加生成。对于粗糙面散射问题而言，入射波长可以作为测量粗糙面粗糙程度的一种尺度。入射波长越小，能够测量到的粗糙面的尺度也越精细。如果粗糙面所包含的精细结构尺寸远小于入射波的波长，那么这些精细结构必然超出入射波的可视范围。在有测量误差的情况下，这种现象则更加明显。

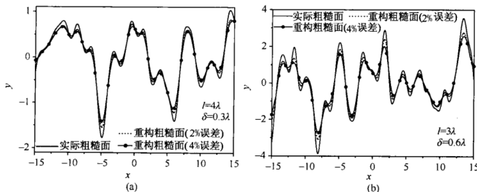


图 7.6　考虑测量误差的高斯随机粗糙面的重构

因此，在图 7.6 中，测量误差越大，粗糙面上尖峰的重构误差也越大。可见，构造脉冲波入射条件下的粗糙面重构算法可以提高粗糙面上精细结构的重构精度。另外，如果能够获取更多的测量数据，那么粗糙面重构的精度也将得到提高。

7.1.2　超宽带脉冲电磁波逆散射算法

1. 时域逆散射算法

在 7.1.1 小节中讨论了时谐电磁波的粗糙面逆散射算法，这一节将频域逆散射算法推广到脉冲电磁波的时域逆散射算法。在脉冲电磁波的时域逆散射模型中，位于粗糙面上方 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0)$ 处的点源天线辐射出脉冲柱面电磁波 $E^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)$，并作为入射电磁波照射到良导体粗糙面上，其中，一维粗糙面的轮廓由连续函数 $y_{\mathrm{f}}=f(x)$ 描述。为了与 7.1.1 小节的符号标记有所区别，在这一节中用 $E(\boldsymbol{r},t)$ 表示时域脉冲电磁波，而在 7.1.1 小节中，用符号 $E_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 表示时谐电磁波（时谐因子为 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$）。粗糙面的逆散射示意图如图 7.7 所示，仍然假设粗糙面轮廓位于 f_- 和 f_+ 之间，将粗糙面上方的空间记作 V_0，f_- 和 f_+ 之间的区域记作 V_1。

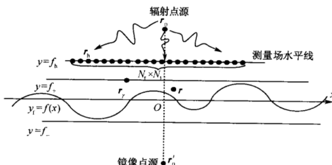


图 7.7　时域脉冲波逆散射示意图

时域逆散射问题可以描述如下：在二维空间中，位于粗糙面上方 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0)$ 处的点源天线辐射出脉冲柱状波，选取粗糙面上方的位置 $\boldsymbol{r}_b(\boldsymbol{r}_b\neq\boldsymbol{r}_0)$ 作为脉冲波的参考点，将参考点的入射脉冲电磁波记作 $u(t)$，定义粗糙面上方 $y=f_{\mathrm{h}}$ 作为测量场水平线。在测量线上设置等间距的 N_{r} 个观察点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}}^1,\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}}^2,\cdots,\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}}^{N_{\mathrm{r}}}$，在每一个观察点上观测出一个脉冲周期内等间隔的 N_{t} 个时刻的总电场 $E^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}},t)$。根据已知的入射条件和 $N_{\mathrm{r}}\times N_{\mathrm{t}}$ 个电场测量值 $E^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}},t)$ 确定粗糙面的位置和轮廓函数 $y_{\mathrm{f}}=f(x)$。

为了构造时域逆散射算法，将 7.1.1 小节中上半空间格林函数的定义式(7.6)重新记作

$$G_{1k}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\Phi_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)-\Phi_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0') \tag{7.23}$$

其中，$\Phi_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=(\mathrm{i}/4)H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|)$ 是二维自由空间中的格林函数，$\boldsymbol{r}_0'$ 是 $\boldsymbol{r}_0$ 点

关于平面 $y=0$ 的镜像点。区域 V_0 中的总电场 $E_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 可以写成上半空间格林函数 $G_{1k}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 和未知散射场 $E_k^u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 之和，即

$$E_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=G_{1k}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)+E_k^u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) \tag{7.24}$$

频域逆散射算法可以分解为两个主要的步骤。首先是求解第一类积分方程

$$\int_{f_h} G_{1k}(\boldsymbol{r}_\gamma,\boldsymbol{r}_h)\phi_\gamma(\boldsymbol{r}_h)\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h)=G_{1k}(\boldsymbol{r}_\gamma,\boldsymbol{r}) \tag{7.25}$$

通常情况下，方程(7.25)可以采用 Tikhonov 正则化方法求解出任意精度的逼近解 $\phi_\gamma^a(\boldsymbol{r}_h)$。第二个步骤便是通过如下的表达式构造二维空间的重构电场，即

$$E_k^a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=G_{1k}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})+\int_{f_h}(E_k^m(\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{r}_0)-G_{1k}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_h))\phi_\gamma^a(\boldsymbol{r}_h)\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}_h),\quad \boldsymbol{r}\in V_0 \tag{7.26}$$

在这一节中，采用 Fourier 变换的方法将 7.1.1 小节中的频域逆散射方法推广到时域逆散射方法。参考点 $\boldsymbol{r}_b$ 处($\boldsymbol{r}_b\neq\boldsymbol{r}_0$)的入射脉冲电磁波可以表示成 Fourier 变换的形式，即

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.27}$$

其中，

$$U(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{7.28}$$

因此，区域 V_0 中的任意位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 处的入射电磁波均可以写成如下的表达式：

$$E^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_{\frac{\omega}{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\Phi_{\frac{\omega}{c}}(\boldsymbol{r}_b,\boldsymbol{r}_0)}U(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.29}$$

其中，c 是入射电磁波在区域 V_0 中的波速。当 $k<0$ 时，$\Phi_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 定义为 $\Phi_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\Phi_{-k}^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$，其中，符号 * 表示复共轭。从式(7.29)的定义可以看出当位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|=|\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_0|$ 时，则 $E^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)=u(t)$。类似于入射脉冲电磁波的频谱积分表达式(7.29)，在区域 V_0 中，总电场也可以表示成频谱积分的形式，即

$$E(\boldsymbol{r},t)=E^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)+E^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E_{\frac{\omega}{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\Phi_{\frac{\omega}{c}}(\boldsymbol{r}_b,\boldsymbol{r}_0)}U(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.30}$$

其中，$\Phi_{\frac{\omega}{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 表示入射到粗糙面上的时谐电磁波，$E_{\frac{\omega}{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 为区域 V_0 中相应的总电场。

在脉冲电磁波散射模型中，假设入射波的脉冲周期为 T，对一个脉冲周期内的入射脉冲电磁波 $u(t)$ 等间隔地采样 N_t 个时间点，其中，N_t 为奇数。同时在角频率区间$[0,2\pi]$也等间隔地采样 N_t 个离散角频率点。式(7.27)的脉冲波 $u(t)$ 经过离散化后变为

$$u_n=\sum_{j=-(N_t-1)/2}^{(N_t-1)/2}X_j\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi j\Delta Tn/T},\quad -\frac{N_t-1}{2}\leqslant n\leqslant\frac{N_t-1}{2} \tag{7.31}$$

其中，时间采样点的步长定义为 $\Delta T=\dfrac{T}{N_t}$，式(7.31)中的 X_j 定义为

$$X_j=\frac{1}{N_t}\sum_{n=-(N_t-1)/2}^{(N_t-1)/2}u_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}jn/N_t},\quad -\frac{N_t-1}{2}\leqslant j\leqslant\frac{N_t-1}{2}\tag{7.32}$$

由于式(7.31)中 u_n 是实数，因此，X_j 满足 $X_j=X_{-j}^*$。在式(7.31)中，将离散化的脉冲电磁波信号写成了离散 Fourier 变换的表达式，事实上也可以将一个连续的脉冲电磁波信号近似写成离散 Fourier 变换的表达式，即

$$u_{N_t}(t)=\sum_{j=-(N_t-1)/2}^{(N_t-1)/2}X_j\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi j(t-T_1)/T}\tag{7.33}$$

其中，T_1 是入射脉冲波的开始时刻，X_j 的具体表达式由式(7.32)给出。将式(7.33)代入式(7.28)可以求得

$$U_{N_t}(\omega)=2\pi\sum_{j=-(N_t-1)/2}^{(N_t-1)/2}X_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_jT_1}\Lambda(\omega-\omega_j)\tag{7.34}$$

其中，$\omega_j=2\pi j/T$ 是入射电磁波被离散化的角频率，$\Lambda(\cdot)$是狄拉克 Λ 函数。由于入射脉冲电磁波没有直流分量，因此，在式(7.34)中 $X_0=0$。将式(7.34)代入式(7.29)，区域 V_0 中的任意位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 处的入射电磁波 $E^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)$可以简化为

$$E_{N_t}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{j=-(N_t-1)/2}^{(N_t-1)/2}A_j\Phi_{k_j}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_j(t-T_1)},\quad j\neq 0\tag{7.35}$$

其中，$k_j=\omega_j/c$ 是离散化的波数，系数项 A_j 定义为

$$A_j=\frac{X_j}{\Phi_{k_j}(\boldsymbol{r}_b,\boldsymbol{r}_0)}\tag{7.36}$$

令 $t_n=T_1+nT/N_t$ 表示第 n 个时间采样点，由于系数项 A_j 满足 $A_j=A_{-j}^*$，所以入射电磁波 $E^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)$可以简化为

$$E^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t_n)=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{(N_t-1)/2}A_j\Phi_{k_j}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi jn/N_t},\quad -\frac{N_t-1}{2}\leqslant n\leqslant\frac{N_t-1}{2}\tag{7.37}$$

在式(7.37)中 $E^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t_n)$表示位置 $\boldsymbol{r}$ 处第 n 个时间采样点的入射电磁波的时域电场。类似于式(7.37)，位置 $\boldsymbol{r}$ 处第 n 个时间采样点的总电场也可以写为

$$E(\boldsymbol{r},t_n)=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{(N_t-1)/2}A_jE_{k_j}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi jn/N_t},\quad -\frac{N_t-1}{2}\leqslant n\leqslant\frac{N_t-1}{2}\tag{7.38}$$

在测量场水平线 $y=f_{\mathrm{h}}$ 上可以测量到任何一个位置 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}}$ 处的电场，测量电场实际上是该位置的总电场，即 $E^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}},t_n)=E(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}},t_n)$。因此，测量电场 $E^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}},t_n)$也可以按照式(7.38)表示成 Fourier 变换的形式，即

$$E^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}},t_n)=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{(N_t-1)/2}a_j(\boldsymbol{r}_{\mathrm{h}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi jn/N_t},\quad -\frac{N_t-1}{2}\leqslant n\leqslant\frac{N_t-1}{2}\tag{7.39}$$

与 7.1.1 小节中的频域逆散射方法类似，首先通过重构二维空间的总电场，然

后根据水平极化电磁波的边界条件确定导体粗糙面的轮廓。二维空间的时域总电场的重构算法可以归纳为如下步骤：

(1)测量场水平线 $y=f_h$ 上，已知任意一个测量点 $\boldsymbol{r}_h$ 的 N_t 个时间采样点的测量电场 $E^m(\boldsymbol{r}_h,t_n)$，其中，$-\frac{N_t-1}{2}\leqslant n\leqslant\frac{N_t-1}{2}$。根据式(7.39)，可以应用离散 Fourier 变换的方法求得该测量点的 N_t 个离散频率点所对应的系数项 $a_j(\boldsymbol{r}_h)$，其中，$-\frac{N_t-1}{2}\leqslant j\leqslant\frac{N_t-1}{2}$。

(2)通过对比式(7.38)和式(7.39)，可以求得 $E^m_{k_j}(\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{r}_0)=\frac{a_j(\boldsymbol{r}_h)}{A_j}$。将步骤(1)中已经求出的 $a_j(\boldsymbol{r}_h)$代入即可求出频域测量场 $E^m_{k_j}(\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{r}_0)$，其中，$j=1,\cdots,\frac{N-1}{2}$。

(3)对于区域 V_0 中的任意一个位置矢量 $\boldsymbol{r}$，方程(7.25)可以被离散化，并通过 Tikhonov 正则化方法求得任意精度的逼近解 $\phi^a_\gamma(\boldsymbol{r}_h)$。将 $\phi^a_\gamma(\boldsymbol{r}_h)$和步骤(2)求出的频域测量场 $E^m_{k_j}(\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{r}_0)$代入式(7.26)求得波数为 k_j 的时谐电磁波对应的频域重构场 $E^a_{k_j}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$，其中，$k_j=\frac{\omega_j}{c}$。

(4)在式(7.38)中，将 $E_{k_j}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$替换为步骤(3)求出的 $E^a_{k_j}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$就可以求得脉冲波的时域总电场的重构表达式为

$$E^a(\boldsymbol{r},t_n)=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{(N_t-1)/2}A_jE^a_{k_j}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi jn/N_t} \tag{7.40}$$

利用式(7.40)就可以重构出区域 V_0 中任意一个位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 处的 N_t 个离散时刻点的时域总电场 $E^a(\boldsymbol{r},t_n)$。按照周期图函数的定义方法定义一个脉冲周期内的总电场的功率为

$$P(\boldsymbol{r})=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{[E^a(\boldsymbol{r},t)]^2}{\eta_0}\mathrm{d}t \tag{7.41}$$

其中，η_0 为自由空间的波阻抗。水平极化的电磁波在导体粗糙面边界处满足边界条件 $E(\boldsymbol{r},t)=0$，因此，求解出功率 $P(\boldsymbol{r})$取最小值的位置就能确定出导体粗糙面的轮廓位置。根据 Parseval 定理[9]，式(7.41)的功率函数可以化简为如下便于计算的表达式：

$$P(\boldsymbol{r})=2\sum_{j=1}^{(N_t-1)/2}\frac{|A_j|^2|E^a_{k_j}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)|^2}{\eta_0} \tag{7.42}$$

2. 数值计算与讨论

以下用数值方法模拟了一维导体粗糙面的时域逆散射。在逆散射模型中，点源天线的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_0(0,7.8\mathrm{m})$，入射电磁波是脉冲周期为 $T=1.3\mathrm{ns}$ 的水平极

化的四阶瑞利脉冲电磁波[10]，其时域脉冲函数为

$$u(t)=\exp\left[-\frac{50\left(t-\frac{T}{2}\right)^2}{T^2}\right]\left\{1+\frac{10000\left(t-\frac{T}{2}\right)^4-600\left(\left(t-\frac{T}{2}\right)^2T^2\right)}{3T^4}\right\}$$

(7.43)

入射脉冲电磁波相应的功率谱函数为

$$U(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega^4T^4}{150000}\exp\left(-\frac{\omega^2T^2}{200}+\mathrm{i}\frac{\omega T}{2}\right) \tag{7.44}$$

由式(7.43)和式(7.44)描述的时域脉冲函数及其功率谱函数的波形如图7.8所示。从图7.8中可以看出四阶瑞利脉冲电磁波包含非常丰富的频谱分量，相对带宽大于25%，属于超宽带脉冲电磁波。在实际应用中，探地雷达、海态雷达等均使用超宽带脉冲电磁波作为探测手段，在地下埋藏物探测、无损探测中又涉及未知表面体的重构问题，因此，这里所研究的超宽带脉冲波的时域逆散射算法具有广泛的应用价值。

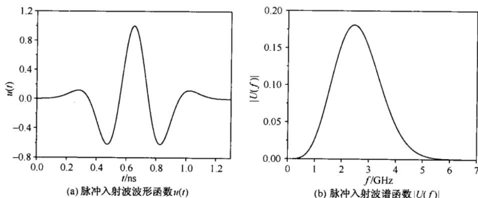


图7.8　脉冲入射波时域和频域波形

按照以下步骤对时域逆散射算法的有效性进行评估：首先用蒙特卡罗方法生成一个随机粗糙面样本，用时域积分方程方法求解该已知粗糙面的时域散射场，并将该时域散射场数据作为逆散射模型中的“测量场数据”；然后按照本节提出的时域逆散射算法的计算步骤，根据该“测量场数据”对未知的粗糙面轮廓进行重构；最后将重构后的粗糙面轮廓与蒙特卡罗方法生成的粗糙面轮廓(实际的粗糙面)进行比较，以此来评估时域逆散射算法是否正确。在通过时域矩量法获得“测量电场数据”的过程中，需要对粗糙面进行离散化操作，粗糙面的长度为$L=156\text{m}$，离散化步长为$\Delta x=0.0039\text{m}$。总电场的测量点位于水平高度$y=f_{\text{h}}=4.68\text{m}$处，一个脉冲周期内的入射脉冲电磁波和测量点处的脉冲电磁波均取$N_t=257$个时间离散

点。一般来说,如果测量点的个数越多,即测量数据较多,那么粗糙面重构的精度就越高。在 7.1.1 小节中选取 100 个测量点,应用频域逆散射算法重构了粗糙面的轮廓,事实证明重构结果是非常准确的。在这一节中,减少测量点的个数,只选取 60 个测量点,测量点间距为 $\Delta x=0.195\mathrm{m}$,应用脉冲波的时域逆散射算法重构了长度为 $L^{a}=11.7\mathrm{m}$ 的粗糙面轮廓。

图 7.9(a)中给出了脉冲波时域逆散射算法与频域逆散射算法对高斯粗糙面的重构效果,其中,点线表示实际的粗糙面轮廓,实线表示时域逆散射算法对粗糙面的重构结果,虚线表示频率 $f=2.45\mathrm{GHz}$ 的频域逆散射算法的重构结果。由于测量点的个数小于 7.1.1 小节中测量点的个数,因此,频域逆散射算法的重构精度有所降低。然而时域逆散射算法的重构精度则明显比频域逆散射算法的重构精度高。对于粗糙面散射问题而言,入射电磁波的频率可以作为测量粗糙面的粗糙程度的一种尺度。入射电磁波的频率越高,能够测量到的粗糙面的尺度也越精细。由于采用了超宽带脉冲电磁波作为入射波,非常丰富的频谱分量使得脉冲电磁波所能观测到的粗糙面的精细结构也更加丰富,因此,时域逆散射算法必然会有较高的重构精度。

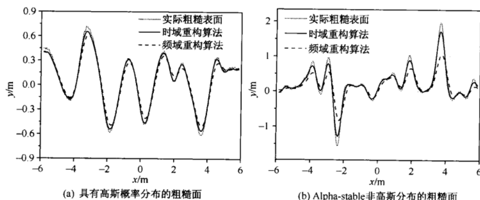


图 7.9 随机粗糙面的重构结果

以上所提出的逆散射算法具有较广的适用范围,并不局限于高斯分布的粗糙面,我们研究了稳定性参数 $\alpha=1.7$ 的 Alpha-stable 非高斯分布的粗糙面的重构问题[11]。如图 7.9(b)所示,点线表示真实的粗糙面轮廓,实线表示时域逆散射算法对粗糙面的重构结果,虚线表示频率 $f=2.45\mathrm{GHz}$ 的频域逆散射算法的重构结果。一般来说,如果粗糙面越趋于平坦,那么重构精度也越高。从数值结果可以看出尖峰的存在会明显降低逆散射算法的精度。那些明显偏离平均位置的尖峰,使粗糙面的轮廓更加"不规则",也使重构算法容易受到干扰。频域逆散射算法具有较大的重构误差,相比之下,时域逆散射算法则具有比较合理的误差。这也进一步说明在逆散射和重构问题中,超宽带脉冲电磁波作为入射波的时域逆散射算法具

有较高的精度和较广的适用范围。

7.2　粗糙面统计参数的反演与重构

7.2.1　分数布朗运动粗糙面的分维数重构算法

材料科学和半导体科学中一个重要的研究方向是研究金属薄膜、半导体薄膜、氧化物薄膜的生长过程和生长过程中出现的分形现象。在实验研究方面，多是采用光学手段来探测材料生长表面的有关信息，这主要是因为光波波长较短，能够探测到足够多的精细结构。而在理论研究方面，则是将不规则的薄膜表面看成粗糙面。在以前的研究工作中，通常采用周期函数或者随机函数来描述材料生长表面，如正弦函数或高斯分布的随机表面函数。分形函数的引入，使得所描述的粗糙面具有自仿射分布特性，兼顾了随机粗糙面大范围有序和小范围无序的特点，往往更接近于实际的材料生长表面[12]。关于分形概念，在 1.3.3 小节已作了简要说明，分形粗糙面在周期粗糙面和具有高斯分布的随机粗糙面之间建立了一种联系桥梁，填补了传统粗糙面模型的不足。分形粗糙面中描述表面粗糙程度的参数不再是随机粗糙面中的均方根高度和相关长度，而是分形统计参数—分维数，本章主要讨论分形模型中常用的分数布朗运动模型（fractal Brownian motion model，FBM）。

分形模型除了能够用来对材料生长表面进行建模，还可以用以实际地面的建模。Giuseppe 等[13]、Giorgio 和 Iodice[14]利用 FBM 模型模拟实际的裸土表面，分别利用 Kirchhoff 近似、微扰法、矩量法计算了该模型的双站、单站电磁散射系数，并将理论计算结果与实验测量的结果进行了比较，研究结果表明 FBM 粗糙面模型能够逼近实际的裸土表面。我们分别应用 Kirchhoff 近似和微扰法研究了 FBM 粗糙地面的平面波电磁散射特性[15,16]。已有的研究充分表明 FBM 粗糙面是一种重要的理论模型，能够用来建模实际的地面和材料生长表面。

尽管国内外学者对 FBM 粗糙面模型开展了一定的研究工作，但目前的研究工作仍有不足。首先，目前建立的 FBM 粗糙面的电磁散射模型均是研究平面波的电磁散射问题，没有涉及有限波束的散射问题；其次，现有的文献仅涉及 FBM 粗糙面的散射问题，而对逆散射问题尚未展开研究。文献[11]曾经就一维粗糙面的逆散射问题作过一定的研究，提出了二维空间场重构理论和粗糙面轮廓的重构算法，分别建立了时谐电磁波和超宽带脉冲电磁波的逆散射模型。FBM 粗糙面在大的尺度上又具有小尺度的精细结构，如果直接对 FBM 表面进行重构，误差会比较大，而且重构后的粗糙面的分形特性会失真。在 FBM 粗糙面模型中，粗糙面的分维数是描述粗糙程度的重要物理量，对电磁散射有重要的影响，因此，在研究逆

散射问题中，反演 FBM 粗糙面的分维数具有重要的实际意义。本节首先建立了 FBM 粗糙面的高斯波束电磁散射模型，然后分析了 FBM 粗糙面的平均电磁散射强度与分维数、电磁波频率的变化关系，最后应用最小二乘法建立了一种多频率的粗糙面的分维数反演算法。

1. 分数布朗运动粗糙面模型

在二维空间中，函数 $z=h(x)$ 表示一维导体粗糙面的轮廓函数。一维 FBM 粗糙面的 Hurst 指数记作 H，其中，$0<H<1$ 且 Hurst 指数 H 和 FBM 粗糙面的分维数 D 之间满足关系式 $H+D=2$。由于 FBM 粗糙面具有自仿射性，表面轮廓满足关系式 $h(ax)=a^H h(x)$，其中，$x>0,a>0$。作为一个具有零均值的高斯随机过程，FBM 粗糙面的自相关函数为[17]

$$C(x_1,x_2)=\frac{s^2}{2}\left(|x_1|^{2H}+|x_2|^{2H}-|x_1-x_2|^{2H}\right) \tag{7.45}$$

其中，s 为 FBM 粗糙面的高度参数，定义为 $s=T^{1-H}$，T 是拓扑维数。从式(7.45)可以看出 FBM 粗糙面的自相关函数不仅与 x_1 和 x_2 两点的距离差有关，而且还与 x_1 和 x_2 两点的坐标有关系，因此，FBM 粗糙面并不是一个平稳的高斯随机过程，而 FBM 粗糙面的增量为平稳的高斯随机过程，即满足 $h(x)-h(x')\sim N(0,s^2|x-x'|^{2H})$。因此，可以求得 FBM 粗糙面的特征函数为

$$\langle\exp(-\mathrm{i}\xi(h(x)-h(x')))\rangle=\exp\left(-\xi^2\frac{s^2}{2}|x-x'|^2\right) \tag{7.46}$$

其中，符号〈·〉代表统计均值。FBM 粗糙面的结构函数为[14]

$$D(|x-x'|)=\langle|h(x)-h(x')|^2\rangle=s^2|x-x'|^{2H}=T^{2-2H}|x-x'|^{2H} \tag{7.47}$$

由于 FBM 粗糙面不是平稳的高斯随机过程，因此，并不存在传统意义上的功率谱密度函数。由式(7.45)可以求得 FBM 粗糙面的二维 Fourier 变换为

$$\hat{C}(\kappa,\xi)=-C_{2H}\frac{s^2}{2}(|\kappa|^{-1-2H}\Lambda(\xi)+|\xi|^{-1-2H}\Lambda(\kappa)-\Lambda(\kappa+\xi)|\kappa|^{-1-2H}) \tag{7.48}$$

对于平稳的高斯随机过程而言，自相关函数的 Fourier 变换也就是功率谱函数，其一般形式为

$$\hat{C}(\kappa,\xi)=\Lambda(\kappa+\xi)S(\kappa) \tag{7.49}$$

比较式(7.48)和式(7.49)，定义 FBM 粗糙面的准功率谱为

$$S(\kappa)=C_{2H}|\kappa|^{-1-2H} \tag{7.50}$$

粗糙面的结构函数和准功率谱具有如下的关系式[14]：

$$D(|x-x'|)=4\pi\int_0^\infty[1-J_0(\kappa\tau)]S(\kappa)\kappa\mathrm{d}\kappa \tag{7.51}$$

利用式(7.51)就可以找到高度参数 s 和准功率谱函数的系数 C_{2H} 之间的关系式[14]，即

$$s^2=\frac{4C_{2H}}{\gamma-2}\Gamma(3-\gamma)\sin\left(\frac{\pi}{2}(3-\gamma)\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{\gamma-1}{2}\right) \tag{7.52}$$

其中，$\gamma=1+2H$，$\Gamma(\cdot)$和 $\mathrm{B}(\cdot)$分别为 Gamma 函数和 Beta 函数。

分数布朗运动粗糙面有多种生成方法，这里采用增量 Fourier 合成方法[18]，其实现步骤如下：

(1)对 $j=0,1,\cdots,N$，生成服从标准正态分布的随机数 $N(j)$和在$[0,2\pi)$区间内均匀分布的随机数 $\Phi(j)$。

(2)对 $n=0,1,\cdots,N$，根据给定的增量 Δx 利用如下公式计算增量 Δx 的相关函数 $C(n)$，即

$$C(n,\Delta x)=\frac{s^2}{2}\left(|(n+1)\Delta x|^{2H}+|(n-1)\Delta x|^{2H}-2|n\Delta x|^{2H}\right) \tag{7.53}$$

对 $n=N+1,\cdots,2N-1$，令

$$C(n)=C(2N-n) \tag{7.54}$$

(3)对 $j=0,1,\cdots,N$，将相关函数 $C(n)$进行快速 Fourier 变换得到功率谱 $\hat{C}(j)$，并且若 $\hat{C}(j)<0$，则令 $\hat{C}(j)=0$。

(4)根据下式计算增量的 Fourier 系数：

$$\hat{X}(j)=\begin{cases}\sqrt{N\hat{C}(j)}N(j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(j)}, & j=0,\cdots,N\\ \hat{X}^*(2N-j), & j=N+1,\cdots,2N-1\end{cases} \tag{7.55}$$

(5)对$\hat{X}(j)$进行 Fourier 逆变换得到增量 $X(n)$。

(6)对 $m=0,1,\cdots,N-1$ 将增量 $X(n)$进行求和，即

$$h(0)=0 \tag{7.56}$$

$$h(m)=\sum_{n=0}^{m-1}X(n) \tag{7.57}$$

其中，$h(m)$表示粗糙面轮廓 $z=h(x)$的第 m 个离散点。在图 7.10 中给出了按照以上算法步骤生成的不同 Hurst 指数的 FBM 粗糙面轮廓，其中，图 7.10(a)的 Hurst 指数为 0.3，分维数为 1.7，图 7.10(b)的 Hurst 指数为 0.7，分维数为 1.3。从图中可以看出分维数越大，FBM 粗糙面轮廓越粗糙，而且大尺度轮廓上的精细结构越多；分维数越小，大尺度轮廓上的精细结构越少，粗糙面轮廓的粗糙程度较弱。

2. 波束电磁散射与逆散射模型

在逆散射模型中，入射电磁波是由一维高斯孔径场辐射的有限波束，沿着高斯

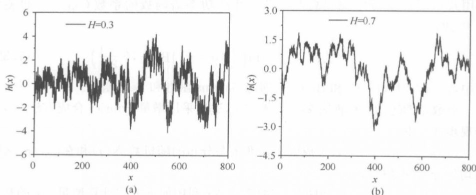


图 7.10　不同 Hurst 指数(或分维数)对应的归一化粗糙面轮廓

波束中心轴方向定义电磁波的入射波矢，记作 $\boldsymbol{k}_i=(k_{ix},k_{iy})=(k\sin\theta_i,k\cos\theta_i)$，其中，$k$ 是自由空间波数，θ_i 是高斯波束中心轴与 z 轴的夹角。入射高斯波束具有如下表达式：

$$E_i(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(k_x-k_{ix})\exp(\mathrm{i}k_x x-\mathrm{i}k_z z)\mathrm{d}k_x \tag{7.58}$$

其中，$\hat{G}(k)$是宽束腰高斯窗函数 $G(x)$的 Fourier 变换，其表达式分别为

$$G(x)=(2\pi^3)^{-\frac{1}{4}}L^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{L^2}} \tag{7.59}$$

$$\hat{G}(k)=(2\pi)^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2L^2}{4}} \tag{7.60}$$

其中，L 是用增量 Fourier 合成方法生成的 FBM 粗糙面的长度。式(7.59)和式(7.60)满足入射电磁波的强度归一化条件，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{G}(k)|^2\mathrm{d}k=1 \tag{7.61}$$

可以求得高斯波束散射场为

$$E_s^{\mathrm{GB}}(k_i,k_s)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(k_x-k_{ix})E_s^{\mathrm{PL}}(k_x,k_{sx})\mathrm{d}k_x \tag{7.62}$$

其中，$E_s^{\mathrm{PL}}(k_x,k_{sx})$是平面波散射场，根据微扰法[19]可以求得 $E_s^{\mathrm{PL}}(k_x,k_{sx})$的表达式为

$$E_s^{\mathrm{PL}}(k_{ix},k_{sx})=a_0\Lambda(k_{ix}-k_{sx})+kA_{\mathrm{SPM}}(k_{ix},k_{sx})\frac{1}{2\pi}\hat{h}(k_{sx}-k_{ix}) \tag{7.63}$$

对于水平极化的入射电磁波有

$$a_0=-1,\quad A_{\mathrm{SPM}}(k_{ix},k_{sx})=2\mathrm{i}\cos\theta_i \tag{7.64}$$

对于垂直极化的入射电磁波有

$$a_0=1,\quad A_{\mathrm{SPM}}(k_{ix},k_{sx})=-2\mathrm{i}\frac{1-\sin\theta_i\sin\theta_s}{\cos\theta_s} \tag{7.65}$$

其中，θ_s 为散射角。

在式(7.63)中，$\hat{h}(k_{sx}-k_{ix})$表示粗糙面轮廓函数 $h(x)$的 Fourier 变换，即

$$\hat{h}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} h(x) dx \tag{7.66}$$

在粗糙面电磁散射模型中，假设粗糙面被高斯波束照射的区域非常大，即满足 $kL|\sin\theta_s - \sin\theta_i| \gg 1$，而且粗糙面是微粗糙的，满足微扰法的适用条件，即 $|h(x)| \ll L$，可以将式(7.62)的积分表达式进一步简化为

$$E_s^{GB}(k_i, k_s) = kA_{SPM}(\theta_i, \theta_s) \int_{-\infty}^{\infty} G(x) h(x) \exp(-i(k_{sx} - k_{ix})x) dx \tag{7.67}$$

根据式(7.62)可以求出波束散射场的平均散射强度为

$$\langle |E_s^{GB}(k_i, k_s)|^2 \rangle = \frac{k^2}{4\pi^2} \left| A_{SPM}(k_{ix}, k_{sx}) \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{1x} dk_{2x} \hat{G}(k_{1x} - k_{ix})$$

$$\times \hat{G}(k_{2x} - k_{ix}) \langle \hat{h}(k_{sx} - k_{1x}) \hat{h}^*(k_{sx} - k_{2x}) \rangle \tag{7.68}$$

而$\langle \hat{h}(k_{sx}-k_{1x}) \hat{h}^*(k_{sx}-k_{2x}) \rangle$的表达式为

$$\langle \hat{h}(k_{sx} - k_{1x}) \hat{h}^*(k_{sx} - k_{2x}) \rangle = \hat{C}(k_{sx} - k_{1x}, k_{2x} - k_{sx}) \tag{7.69}$$

$\hat{C}(\kappa, \xi)$是 FBM 粗糙面的自相关函数 $C(x_1, x_2)$的二维 Fourier 变换，其表达式由式(7.48)给出。将式(7.48)代入式(7.68)可以求得非镜向方向的平均散射强度为

$$\begin{aligned}\langle |E_s^{GB}(k_i, k_s)|^2 \rangle &= C_{2H} \frac{s^2 k^2}{8\pi^2} |A_{SPM}(k_{ix}, k_{sx})|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \hat{G}(k_{1x} - k_{ix})^2 |k_x - k_{sx}|^{-1-2H} \\ &= C_{2H} \frac{s^2 k^2 L}{8\sqrt{2}\pi^{\frac{5}{2}}} |A_{SPM}(k_{ix}, k_{sx})|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \exp\left(-\frac{(k_x - k_{ix})^2 L^2}{2}\right) \\ &\quad \times |k_x - k_{sx}|^{-1-2H}\end{aligned} \tag{7.70}$$

当入射波束是较宽的高斯波束时，粗糙面被照射到的区域比较大，满足 $|k_x - k_{ix}| L \gg 1$，这时可以利用驻相积分求解式(7.70)，求解后的结果为

$$\langle |E_s^{GB}(k_i, k_s)|^2 \rangle = C_{2H} \frac{s^2 k^2}{8\pi^2} |A_{SPM}(k_{ix}, k_{sx})|^2 |k_{ix} - k_{sx}|^{-1-2H} \tag{7.71}$$

将式(7.64)和式(7.65)代入到式(7.71)中，可以求得平均散射强度为

$$\langle |E_s^{GB}(k_i, k_s)|^2 \rangle = s^2 C_0(\theta_i, \theta_s) k^{1-2H} \tag{7.72}$$

其中，对于水平极化，$C_0(\theta_i, \theta_s)$的表达式为

$$C_0(\theta_i, \theta_s) = \frac{C_{2H}}{2\pi^2} \cos^2\theta_i |\sin\theta_i - \sin\theta_s|^{-1-2H} \tag{7.73}$$

对于垂直极化，$C_0(\theta_i, \theta_s)$的表达式为

$$C_0(\theta_i, \theta_s) = \frac{C_{2H}}{2\pi^2} \frac{(1 - \sin\theta_i \sin\theta_s)^2}{\cos^2\theta_s} |\sin\theta_i - \sin\theta_s|^{-1-2H} \tag{7.74}$$

令

$$I_s = |E_s^{GB}(k_i, k_s)|^2, \quad \alpha = 1 - 2H \tag{7.75}$$

从式(7.72)可以看出 I_s 的均值正比于 k^α，即

$$\langle I_s \rangle \propto k^\alpha \tag{7.76}$$

从式(7.62)和式(7.63)可以看出散射场 $E_s^{GB}(k_i, k_s)$ 与粗糙面轮廓的 Fourier 变换 $\hat{h}(k_{sx} - k_{ix})$ 成正比。根据粗糙面的谱域合成方法[8]可知任何一个随机粗糙面样本 $h(x)$ 都可以看成式(1.17)所示的逆 Fourier 变换

$$h(x_n) = \frac{1}{L}\sum_{j=-N/2}^{j=N/2} F(K_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_j x_n} \tag{7.77}$$

而 Fourier 变换项 $F(K_j)$ 正比于实部和虚部均为高斯分布的复随机数，即

$$F(K_j) \propto N(0,1) + \mathrm{i}N(0,1) \tag{7.78}$$

其中，$N(0,1)$ 表示标准正态分布随机数。因此，可以认为粗糙面轮廓的 Fourier 变换 $\hat{h}(k_{sx} - k_{ix})$ 也正比于实部和虚部均为高斯分布的复随机数。根据式(7.75)的定义，散射强度 I_s 是一个指数分布[20]，即可以将 I_s 写成如下的表达式：

$$I_s = \frac{s^2}{2} C_0(\theta_i, \theta_s) k^\alpha Z \tag{7.79}$$

其中，Z 是一个均值为 2 的指数分布的随机变量。令

$$x_j = \lg k_j, \quad y_j = \lg I_s(k_j) \tag{7.80}$$

其中，$k_j(1 \leqslant j \leqslant N)$ 表示离散化的入射电磁波的波数，$\lg(x)$ 为以 10 为底的对数函数。结合式(7.72)和式(7.79)可以得出 x_j 和 y_j 近似成线性关系。通常情况下，可以根据数值方法拟合出最佳的线性函数，参数 α 便是该线性函数的斜率。定义 α^r 为参数 α 的反演值，应用最小二乘法可以估算出

$$\alpha^r = \sum_{j=1}^{N} w_j y_j \tag{7.81}$$

w_j 定义为

$$w_j = \frac{N x_j - \sum_{j=1}^{N} x_j}{N \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2} \tag{7.82}$$

权重因子 w_j 满足 $\sum_{j=1}^{N} w_j = 0$ 和 $\sum_{j=1}^{N} w_j x_j = 1$。重构后的 Hurst 指数和分维数分别由下面的公式确定：

$$H^r = \frac{1-\alpha^r}{2}, \quad D^r = 2 - H^r \tag{7.83}$$

3. *有关无偏反演算法的论证*

粗糙面的统计参数所描述的是具有相同粗糙程度的一组粗糙面样本。例如，

两个粗糙面样本具有相同的分维数，但是这两个粗糙面样本的轮廓却完全不同。在实际应用中，如果只测量一个粗糙面样本的散射强度数据来反演分维数，反演误差会比较大。通常情况下是测量具有相同的统计参数的大量的随机粗糙面的散射强度数据来反演统计参数。根据不同的粗糙面样本所反演出的分维数也会有所不同，但是根据大量粗糙面样本反演出的分维数的均值应该跟这组粗糙面样本的实际分维数非常接近。为了论证式(7.81)～式(7.83)给出的反演公式的正确性，有必要对反演算法反演出的分维数的均值、方差进行分析，以证明这种反演算法是一种无偏反演算法。根据式(7.79)和式(7.80)可以求得

$$y_j = \alpha \lg k_j + \lg\left(\frac{s^2}{2} C_0(\theta_i, \theta_s) Z\right) \tag{7.84}$$

可以求得 y_j 的均值为

$$\langle y_j \rangle = \alpha \lg k_j + \left\langle \lg\left(\frac{s^2}{2} C_0(\theta_i, \theta_s) Z\right) \right\rangle \tag{7.85}$$

根据文献[21]，对于一个均值为 2 的指数分布随机变量 Z，可以求得其自然对数的方差为

$$D(\ln Z) = \xi(2,1) \tag{7.86}$$

其中，$\xi(2,1)$为广义黎曼函数。因此，y_j 的方差为

$$D(y_i) = D(\lg Z) = D\left(\frac{\ln Z}{\ln 10}\right) = \frac{\xi(2,1)}{(\ln 10)^2} \tag{7.87}$$

将式(7.85)代入式(7.81)，即可得反演后的参数 α^r 的均值为

$$\langle \alpha^r \rangle = \sum_{j=1}^{N} w_j \langle y_j \rangle = \alpha \sum_{j=1}^{N} w_j x_j + \left\langle \lg\left(\frac{s^2}{2} C_0(\theta_i, \theta_s) Z\right) \right\rangle \sum_{j=1}^{N} w_j = \alpha \sum_{j=1}^{N} w_j x_j = \alpha \tag{7.88}$$

将式(7.87)代入式(7.81)，即求得 α^r 的方差为

$$D(\alpha^r) = D\left(\sum_{j=1}^{N} w_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{N} w_j^2 D(y_j) = \frac{\xi(2,1)}{(\ln 10)^2} \sum_{j=1}^{N} w_j^2 \tag{7.89}$$

令 k^l 和 k^h 分别表示入射电磁波的最低波数和最高波数，对电磁波的波数 k 采用对数等间距的离散采样，即

$$x_j = \lg k_j = \lg k^l + \frac{j(\lg k^h - \lg k^l)}{N} \tag{7.90}$$

令

$$\Delta x = \frac{\lg k^h - \lg k^l}{N} \tag{7.91}$$

根据等差数列的求和公式，可以求得

$$\sum_{j=1}^{N} x_j = N \lg k^l + \frac{N(N+1)}{2} \Delta x \tag{7.92}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j^2 = N(\lg k^1)^2 + 2(\lg k^1)\frac{N(N+1)}{2}\Delta x + \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}(\Delta x)^2 \tag{7.93}$$

根据式(7.82)、式(7.92)和式(7.93)可以求得

$$\sum_{1}^{N} w_j^2 = \frac{N}{N\sum_{j=1}^{N} x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2} = \frac{N^3}{\left(\frac{N^2(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N^2(N+1)^2}{4}\right)\lg^2\frac{k^h}{k^l}} \tag{7.94}$$

当 $N\to\infty$ 时，可以求得如下的极限表达式：

$$\lim_{N\to\infty} N\sum_{1}^{N} w_j^2 = \frac{12}{\lg^2(k^h/k^l)} \tag{7.95}$$

将式(7.95)代入式(7.89)可以求得 α^r 的方差为

$$\lim_{N\to\infty} D(\alpha^r) = \frac{12\xi(2,1)}{(\ln 10)^2 N \lg^2(k^h/k^l)} \tag{7.96}$$

从式(7.96)可以看出当入射电磁波的频率离散点的个数为 N 时，方差 $D(\alpha^r)$ 正比于 $\frac{1}{N}$，即

$$D(\alpha^r) \propto \frac{1}{N} \tag{7.97}$$

因此，只要能够选择足够多的频率离散点，就能把反演的参数 α^r 的方差控制在足够小的范围内，从而重构后的 Hurst 指数 H^r 和分维数 D^r 的方差也能够控制在足够小的范围内。由式(7.88)和式(7.97)便可以证明本节的分维数或 Hurst 指数的反演算法是一种无偏反演算法。

4. 反演算法对电磁波频率的限制条件

根据前面的有关推导，只要能测量出一系列的不同频率的入射电磁波所对应的电磁散射强度 I_s，就可以利用最小二乘法的有关公式重构出 FBM 粗糙面的分维数。从电磁波与粗糙面的作用机理来讲，电磁波的频率越高，能够探测到的粗糙面上的精细结构越多。FBM 粗糙面是一种典型的多尺度粗糙面模型，粗糙面的轮廓具有统计自相似性。FBM 粗糙面上的精细结构比一般粗糙面上的精细结构多，因此，反演 FBM 粗糙面的分维数的过程中，对入射电磁波的频率提出了更高的要求。如果入射电磁波为脉冲电磁波，则必须要求脉冲电磁波包含非常丰富的频谱分量，通常采用超宽带脉冲电磁波。如果采用时谐电磁波作为入射波，则要求采样足够多的不同频率的时谐电磁波的散射强度数据。为了利用有限的电磁波频带，减少重复测量，要求不同频率的入射电磁波所对应的电磁散射强度 $I_s(k_j)$ 必须是不相关的[20]。因此，必须研究如何取值 $k_j(1\leqslant j\leqslant N)$ 才能使得 $I_s(k_j)$ 不相关。定

义散射强度的相关系数为

$$\rho=\frac{\langle I_s I_s'\rangle-\langle I_s\rangle\langle I_s'\rangle}{\langle I_s\rangle\langle I_s'\rangle} \tag{7.98}$$

将 $I_s(k_j)$ 的定义式(7.75)代入式(7.98)中,即得到

$$\rho=\frac{\langle|E_s^{GB}(k_i,k_s)|^2|E_s^{GB}(k_i',k_s')|^2\rangle-\langle|E_s^{GB}(k_i,k_s)|^2\rangle\langle|E_s^{GB}(k_i',k_s')|^2\rangle}{\langle|E_s^{GB}(k_i,k_s)|^2\rangle\langle|E_s^{GB}(k_i',k_s')|^2\rangle} \tag{7.99}$$

根据式(7.67)可以求得

$$\begin{aligned}&\langle|E_s^{GB}(k_i,k_s)|^2|E_s^{GB}(k_i',k_s')|^2\rangle\\&=[kA_{SPM}(\theta_i,\theta_s)]^4\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-ik_d(x-y)]\exp[-ik_d'(x'-y')]\\&\quad\times G(x)G(y)G(x')G/(y')\langle h(x)h(y)h(x')h(y')\rangle dxdydx'dy'\end{aligned} \tag{7.100}$$

其中,$k_d=k_{sx}-k_{ix}$,$k_d'=k_{sx}'-k_{ix}'$。对于高斯随机过程,其高阶相关函数可以表达成低阶相关函数的形式,即

$$\begin{aligned}\langle h(x)h(y)h(x')h(y')\rangle=&\langle h(x)h(y)\rangle\langle h(x')h(y')\rangle+\langle h(x)h(x')\rangle\\&\times\langle h(y)h(y')\rangle+\langle h(x)h(y')\rangle\langle h(y)h(x')\rangle\end{aligned} \tag{7.101}$$

将式(7.101)代入式(7.100)中可得

$$\begin{aligned}&\langle|E_s^{GB}(k_i,k_s)|^2|E_s^{GB}(k_i',k_s')|^2\rangle\\&=[kA_{SPM}(\theta_i,\theta_s)]^4[M(k_d,-k_d)M(k_d',-k_d')\\&\quad+M(k_d,k_d')M(-k_d,-k_d')+M(k_d,-k_d')M(-k_d,k_d')]\end{aligned} \tag{7.102}$$

其中,

$$M(k_d,-k_d)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik_d(x-y))G(x)G(y)\langle h(x)h(y)\rangle dxdy \tag{7.103}$$

$$M(k_d',-k_d')=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik_d'(x'-y'))G(x')G(y')\langle h(x')h(y')\rangle dx'dy' \tag{7.104}$$

$$M(k_d,k_d')=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik_dx-ik_d'x')G(x)G(x')\langle h(x)h(x')\rangle dxdx' \tag{7.105}$$

$$M(-k_d,-k_d')=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ik_dy+ik_d'y')G(y)G(y')\langle h(y)h(y')\rangle dydy' \tag{7.106}$$

$$M(k_d,-k_d')=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik_dx+ik_d'y)G(x)G(y')\langle h(x)h(y')\rangle dxdy' \tag{7.107}$$

$$M(-k_d,k_d') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}k_d y - \mathrm{i}k_d' x')G(y)G(x')\langle h(y)h(x')\rangle \mathrm{d}y\mathrm{d}x' \tag{7.108}$$

为了求解式(7.103)～式(7.108)，求解如下通用表达式：

$$\begin{aligned} M(k_1,k_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}k_1 x - \mathrm{i}k_2 y)G(x)G(y)\langle h(x)h(y)\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\exp(-\mathrm{i}k_1 x - \mathrm{i}k_2 y)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(k_1')\exp(\mathrm{i}k_1' x)\mathrm{d}k_1' \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(k_2')\exp(\mathrm{i}k_2' y)\mathrm{d}k_2'\}\langle h(x)h(y)\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle h(x)h(y)\rangle \exp(-\mathrm{i}(k_1-k_1')x \right. \\ &\quad \left. -\mathrm{i}(k_2-k_2')y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}\hat{G}(k_1')\hat{G}(k_2')\mathrm{d}k_1'\mathrm{d}k_2' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{C}(k_1-k_1',k_2-k_2')\hat{G}(k_1')\hat{G}(k_2')\mathrm{d}k_1'\mathrm{d}k_2' \end{aligned} \tag{7.109}$$

将式(7.48)代入式(7.109)中得到

$$M(k_1,k_2) = M_1 + M_2 + M_3 \tag{7.110}$$

其中，

$$M_1 = -C_{2H}\frac{s^2}{2}\hat{G}(k_2)\int_{-\infty}^{\infty}|k_1-k_1'|^{-1-2H}\hat{G}(k_1')\mathrm{d}k_1' \tag{7.111}$$

$$M_2 = -C_{2H}\frac{s^2}{2}\hat{G}(k_1)\int_{-\infty}^{\infty}|k_2-k_2'|^{-1-2H}\hat{G}(k_2')\mathrm{d}k_2' \tag{7.112}$$

$$M_3 = C_{2H}\frac{s^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|k_1-k_1'|^{-1-2H}\hat{G}(k_1')\hat{G}(k_1+k_2-k_1')\mathrm{d}k_1' \tag{7.113}$$

在电磁逆散射模型中，为了获得足够精确的逆散射信息，被照射到的粗糙面区域必须远大于入射波的波长，即满足 $k_m L \gg 1(m=1,2)$。这时，可以作如下近似：

$$L^{-1/2}\hat{G}(k_m) \approx 0 \tag{7.114}$$

$$L^{1/2}\hat{G}(k_m-k) \approx (2\pi^3)^{-1/4}\Lambda(k_m-k) \tag{7.115}$$

$$\hat{G}(k)\hat{G}(k_1+k_2-k) \approx \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\Lambda(k)\exp\left(-\frac{L^2}{4}(k_1+k_2)^2\right) \tag{7.116}$$

将式(7.114)～式(7.116)代入式(7.111)～式(7.113)可以求得

$$M_1 = M_2 = 0 \tag{7.117}$$

$$M(k_1,k_2) = M_3 = C_{2H}\frac{s^2}{2\sqrt{2}\pi}\exp\left(-\frac{L^2}{4}(k_1+k_2)^2\right)|k_1|^{-1-2H} \tag{7.118}$$

将式(7.118)代入式(7.102)中，可以求得

$$\langle|E_s^{\mathrm{GB}}(k_i,k_s)|^2|E_s^{\mathrm{GB}}(k_i',k_s')|^2\rangle = [kA_{\mathrm{SPM}}(\theta_i,\theta_s)]^4\left[C_{2H}\frac{s^2}{2\sqrt{2}\pi}\right]^2|k_d|^{-1-2H}|k_d'|^{-1-2H}$$

$$\left[1+\exp\left(-\frac{L^2}{2}(k_d+k_d')^2\right)+\exp\left(-\frac{L^2}{2}(k_d-k_d')^2\right)\right] \tag{7.119}$$

用同样的方法可以求得

$$\langle|E_s^{GB}(k_i,k_s)|^2\rangle\langle|E_s^{GB}(k_i',k_s')|^2\rangle=[kA_{SPM}(\theta_i,\theta_s)]^4\left[C_{2H}\frac{s^2}{2\sqrt{2}\pi}\right]|k_d|^{-1-2H}|k_d'|^{-1-2H} \tag{7.120}$$

将式(7.119)和式(7.120)代入式(7.99)中，可得散射强度的相关系数为

$$\rho=\exp\left(-\frac{L^2}{2}(k_d+k_d')^2\right)+\exp\left(-\frac{L^2}{2}(k_d-k_d')^2\right) \tag{7.121}$$

从式(7.121)可以看出只要能满足

$$|k_d\pm k_d'|\gg\frac{1}{L} \tag{7.122}$$

就可以认为不同频率的入射电磁波所对应的电磁散射强度 $I_s(k_j)$ 是不相关的。在电磁逆散射模型中，只要两个不同频率的电磁波对应的散射强度不相关，则认为这样的电磁散射强度数据对统计参数的反演是有效数据；反之，如果两个不同频率的电磁波的散射强度是相关的，则认为这样的电磁散射强度数据是重复测量数据。如果固定入射角 θ_i 和散射角 θ_s 不变，式(7.122)的限制条件可以简化为

$$L|k-k'|\gg 1 \tag{7.123}$$

其中，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$ 为入射电磁波的波数，λ 为入射电磁波的波长，L 为粗糙面被照射区域的长度。

5. *考虑角度变化的分维数重构算法*

前文给出了利用不同频率的电磁波对应的电磁散射强度反演 FBM 粗糙面分维数的重构算法。根据式(7.97)可知频率离散点数越多，反演出的分维数的方差越小，反演精度越高。在实际应用中，受实验测量条件的限制，只能测量出有限个频率的电磁波的散射强度。针对这种情况，这里对反演算法进行了改进，给出了一种多频率、多散射角的反演分维数的方法。定义

$$I_s^\theta=\frac{1}{N_\theta}\sum_{q=1}^{N_\theta}|E_s^{GB}(k_i,k_s(\theta_q))|^2 \tag{7.124}$$

其中，

$$\theta_q=\theta_s^l+\frac{q(\theta_s^h-\theta_s^l)}{N_\theta},\quad q=1,2,\cdots,N_\theta \tag{7.125}$$

θ_s^l 和 θ_s^h 是散射角的最小值和最大值。改进后的算法只需要用式(7.124)的 I_s^θ 代

替 I_s，仍然按照最小二乘法的思路进行分维数的反演。只要满足式(7.122)的限制条件就可以认为散射强度数据是线性无关的，由式(7.122)可以求解出散射角增量 $\Delta\theta_s=\frac{\theta_s^h-\theta_s^l}{N_\theta}$ 需要满足的限制条件为

$$k_j(\sin(\theta_s+\Delta\theta_s)-\sin\theta_s)\gg\frac{1}{L} \tag{7.126}$$

这一限制条件可以近似的改写为

$$\Delta\theta_s\gg\frac{1}{k_jL\cos\theta_s} \tag{7.127}$$

在实际应用中一般是根据散射角变化的上限 θ_s^h 来具体确定散射角的变化步长，式(7.127)的限制条件进一步简化为

$$\Delta\theta_s\gg\frac{1}{k_jL\cos\theta_s^h} \tag{7.128}$$

6. 数值计算与讨论

由于一维分数布朗运动粗糙面的分维数 D 和 Hurst 指数 H 满足关系式 $D+H=2$，因此，Hurst 指数的重构与分维数的重构是等价的。在反演过程中，用粗糙面的散射理论求解出的散射强度数据来模拟测量数据。反演重构算法的具体步骤如下：

(1)用增量 Fourier 合成方法产生一个 Hurst 指数为 H 的 FBM 粗糙面样本 1。

(2)根据式(7.67)求解出不同入射频率的电磁波对应的一系列的电磁散射场 $E_s^{GB}(k_i,k_s)$，代入式(7.75)求解出不同入射频率的电磁波的散射强度 $I_s(k_j)$，将计算出的散射强度 $I_s(k_j)$作为“测量数据”，根据式(7.80)～式(7.83)重构出 Hurst 指数 H_1^r。

(3)重复步骤(1)和(2)产生 Hurst 指数为 H 的分数布朗运动粗糙面样本 2，样本 3，…，样本 M，将重构后的 Hurst 指数分别记作 $H_2^r,H_3^r,\cdots,H_M^r$。

(4)对 M 个粗糙面样本的重构后的 Hurst 指数 $H_1^r,H_2^r,H_3^r,\cdots,H_M^r$ 进行统计，其均值记作 $E(H^r)$，方差记作 $D(H^r)$。

按照以上 4 个步骤，比较 FBM 粗糙面样本的实际 Hurst 指数和反演后的 Hurst 指数的均值 $E(H^r)$，方差 $D(H^r)$就可以检验重构算法的准确性。在实际操作中，步骤(2)还可以进行改进，即求解出不同入射频率、不同散射角的电磁散射强度作为“测量数据”。

选取粗糙面被照射的长度为 $L=1024$mm，入射波长 λ 从 0.1mm 变化到 50mm，电磁波以入射角 $\theta_i=20°$的方向入射到一维导体 FBM 粗糙面上。在图 7.11 中给出了 $H=0.7$，$s=0.6$ 的 10 个随机粗糙面样本的散射强度随电磁波频率

的变化曲线，横、纵坐标均取对数后，可以发现 $\lg I_s(k_j)$ 可以近似看成 $\lg k_j$ 的线性函数。实线表示采用数值方法拟合出来的最佳线性函数。

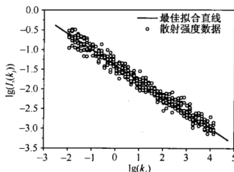


图 7.11　10 个表面样本的 $\lg I_s(k_j)$-$\lg k_j$ 数据

在逆散射算法中，对入射电磁波的波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ 求解对数后进行等间距离散化，离散化的点数为 $N=500$。通过计算可以发现选取这样的参数满足式(7.123)的逆散射算法的限制条件。分别采用以下两种重构方法：

方法一　采用只考虑电磁波频率发生变化，而散射角不发生变化的多频率逆散射算法。在这种情况下只计算后向电磁散射强度作为重构算法的“测量数据”。

方法二　采用电磁波频率和散射角均发生变化的多频率、多散射角重构算法，电磁波频率的离散化过程跟方法一相同。计算散射角 θ_s 位于后向散射区域 $15°\sim25°$ 范围内的 10 个等间距散射角的电磁散射强度，并将随散射角发生变化的电磁散射强度按照式(7.124)求解角度平均后作为重构算法的“测量数据”。通过计算发现这样的角度离散化能够使散射角增量 $\Delta\theta_s$ 满足式(7.128)的限制条件。

我们分别研究了 Hurst 指数 H 为 0.7，0.8，高度参数 s 为 0.5，1.0，1.5 的 FBM 粗糙面的 Hurst 指数反演问题。按照步骤(1)～(4)，对于每一组 Hurst 指数和高度参数分别研究了 256 个粗糙面样本。表 7.1 和表 7.2 分别给出了方法一和方法二的反演结果。从表中的反演数据可以看出对于高度参数 s 越小的 FBM 粗糙面，反演出来的 Hurst 指数的平均值与粗糙面的实际值越接近，Hurst 指数的反演统计方差 $D(H')$ 越小。对于 Hurst 指数越大(分维数越小)的粗糙面，由于粗糙程度较小，所以 Hurst 指数的反演精度越高，反演方差 $D(H')$ 越小。通过比较表 7.1 和表 7.2 可以看出多频率、多散射角的重构算法的反演精度比多频率、单散射角的重构算法的反演精度略高。这说明如果受实验条件限制，无法获取足够多频率的电磁散射强度，可以测量多个散射角的散射强度数据来弥补这一缺陷，从而将 Hurst 指数或者分维数的反演误差控制在一定的误差范围内。

表 7.1　按照方法一重构后的 Hurst 指数与实际 Hurst 指数的比较

H	s	$E(H^r)$	$D(H^r)$
0.7	0.5	0.6966	0.0525
0.7	1.0	0.7076	0.0858
0.7	1.5	0.7114	0.1514
0.8	0.5	0.8030	0.0521
0.8	1.0	0.7921	0.0762
0.8	1.5	0.7887	0.1262

表 7.2　按照方法二重构后的 Hurst 指数与实际 Hurst 指数的比较

H	s	$E(H^r)$	$D(H^r)$
0.7	0.5	0.7026	0.0426
0.7	1.0	0.7053	0.0751
0.7	1.5	0.7098	0.1138
0.8	0.5	0.7979	0.0501
0.8	1.0	0.7926	0.0699
0.8	1.5	0.7904	0.1032

7.2.2　高斯粗糙面的相关长度和均方根高度的重构算法

上节研究了 FBM 粗糙面分维数的重构算法。一方面，分维数是表征 FBM 粗糙表面粗糙度的重要物理量，因此，反演分维数具有重要的物理意义和应用价值；另一方面，对分维数的重构属于单个变量的重构问题，实现起来比较简单。高斯相关的随机粗糙面不具有分形特征，其粗糙程度由相关长度和均方根高度两个变量来描述。反演高斯相关的随机粗糙面的统计参数问题，是根据粗糙面的平均散射强度反演出相关长度和均方根高度。

对于两个变量的重构问题，有的学者曾用优化理论进行求解，将理论计算获得的散射强度与实验测量的散射强度作差值，建立目标函数，求解有关两个未知量的极小值问题。然而，这种优化方法的重构效率较低，原因如下：一方面，有关相关长度和均方根高度的极值问题存在诸多局部极小值，而现有的能够求解两个未知量的极值搜索算法，如最速下降法、拟牛顿法、共轭梯度法等，尽管搜索速度比较快，却只能搜索出局部极小值而不能搜索全局极小值；另一方面，能够求解全局极值问题的搜索算法，如遗传算法，虽然能够准确地搜索到极值，但是计算时间非常漫长，实现起来比较复杂，不适合工程应用。优化算法是一种纯粹的数学方法，因此，用优化方法求解电磁波逆散射问题无法反映出电磁散射的物理本质。在此提出了一

种根据电磁散射的物理规律来重构相关长度和均方根高度的方法。其思路如下：首先根据镜向相干电磁散射强度数据重构出粗糙面的均方根高度，从而将两个变量的重构问题简化为一个变量的重构问题，再用一维优化搜索方法重构相关长度。众所周知，关于一个变量的极值问题目前已有非常成熟的方法搜索到全局最小值，而且计算量非常小。

1. 电磁散射理论

在电磁散射模型中，平面电磁波入射到一维导体粗糙面上，根据 Kirchhoff 单次散射理论[22]，散射场可表示为

$$E_s(x,z)=\left(\frac{2}{\pi k r_0}\right)^{1/2}\frac{e^{i(kr_0+\pi/4)}}{2\pi}\left(\frac{1+\cos(\theta_s+\theta_i)}{\cos\theta_s+\cos\theta_i}\right)\int_C R(x')A_i\exp(i(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_s)\cdot\boldsymbol{r}_s)dx' \tag{7.129}$$

在式(7.129)中忽略了遮蔽函数，$R(x')=\pm1$ 分别表示导体粗糙面的垂直极化或水平极化电磁波的非涅耳反射系数。对于导体粗糙面而言，电磁散射强度与入射电磁波的极化方式无关，因此，在本节的反演模型中仅考虑 $R(x')=1$ 的情况。通常情况下，选取入射电磁波的振幅 $A_i=1$。θ_i 和 θ_s 分别表示入射角和散射角，k 为入射电磁波在自由空间中的波数，r_0 是观察点 $\boldsymbol{r}_0(x,z)$ 到坐标原点的距离，$\boldsymbol{r}_s(x',z')$ 表示粗糙面上散射点的位置矢量。$\boldsymbol{k}_i$ 和 $\boldsymbol{k}_s$ 分别表示电磁波的入射波矢和散射波矢，分别定义为

$$\boldsymbol{k}_i=k\sin\theta_i\,\hat{\boldsymbol{x}}-k\cos\theta_i\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{7.130}$$

$$\boldsymbol{k}_s=k\sin\theta_s\,\hat{\boldsymbol{x}}+k\cos\theta_s\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{7.131}$$

令

$$C_{s2}=\left(\frac{L}{\pi k r_0}\right)^{1/2}\frac{\exp(i(kr_0+\pi/4))\cos\theta_i}{\pi} \tag{7.132}$$

则式(7.129)中的散射场可以写为

$$E_s(x,z)=C_{s2}\rho(\theta_i,\theta_s) \tag{7.133}$$

式(7.133)的 $\rho(\theta_i,\theta_s)$ 定义为

$$\rho(\theta_i,\theta_s)=\frac{1}{\sqrt{2L}}F(\theta_i,\theta_s)\cdot\int_{-L}^{L}\exp(i(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_s)\cdot\boldsymbol{r}_s)dx' \tag{7.134}$$

其中，

$$F(\theta_i,\theta_s)=\frac{1+\cos(\theta_s+\theta_i)}{\cos\theta_i(\cos\theta_s+\cos\theta_i)} \tag{7.135}$$

根据式(7.133)可以看出总的电磁散射强度可以表示成

$$\langle E_sE_s^*\rangle=|C_{s2}|^2\langle\rho\rho^*\rangle \tag{7.136}$$

相干电磁散射强度可以写为

$$|\langle E_s\rangle|^2 = |C_{s2}|^2|\langle\rho\rangle|^2 \tag{7.137}$$

根据式(7.134)可以求得

$$\langle\rho\rho^*\rangle = \frac{[F(\theta_i,\theta_s)]^2}{2L}\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}\exp(iv_x(x_1-x_2))\langle\exp(iv_z(z_1-z_2))\rangle dx_1 dx_2 \tag{7.138}$$

其中，

$$v_x = k(\sin\theta_i - \sin\theta_s), \quad v_z = -k(\cos\theta_i + \cos\theta_s) \tag{7.139}$$

令

$$x_{12} = x_1 + x_2, \quad x_d = x_1 - x_2 \tag{7.140}$$

将式(7.138)的积分简化为

$$\langle\rho\rho^*\rangle = [F(\theta_i,\theta_s)]^2\int_{-L}^{L}\exp(iv_x x_d)\exp(iv_z(z_1-z_2))dx_d \tag{7.141}$$

对于高度起伏满足高斯概率分布的粗糙面，联合特征函数可以求得解析表达式，即

$$\langle\exp(iv_z(z_1-z_2))\rangle = \exp[-v_z^2\delta_h^2(1-C(x_d))] \tag{7.142}$$

其中，δ_h 是均方根高度，$C(x_d)$是粗糙面的自相关函数，对于高斯自相关函数，$C(x_d)$的表达式为

$$C(x_d) = \exp\left(-\left|\frac{x_d}{l}\right|^2\right) \tag{7.143}$$

其中，l 为粗糙面的相关长度。将式(7.142)代入式(7.141)中，可以将$\langle\rho\rho^*\rangle$简化为

$$\langle\rho\rho^*\rangle = [F(\theta_i,\theta_s)]^2\int_{-L}^{L}\exp(iv_x x_d - v_z^2\delta_h^2)\exp[v_z^2\delta_h^2 C(x_d)]dx_d \tag{7.144}$$

用类似的方法可以求得

$$|\langle\rho\rangle|^2 = [F(\theta_i,\theta_s)]^2\int_{-L}^{L}\exp(iv_x x_d)|\langle\exp(iv_z z)\rangle|^2 dx_d \tag{7.145}$$

其中，特征函数表达式为

$$\langle\exp(iv_z z)\rangle = \exp\left(-\frac{v_z^2\delta_h^2}{2}\right) \tag{7.146}$$

将式(7.146)代入式(7.145)中可以求得

$$|\langle\rho\rangle|^2 = [F(\theta_i,\theta_s)]^2\int_{-L}^{L}\exp(iv_x x_d - v_z^2\delta_h^2)dx_d \tag{7.147}$$

根据式(7.144)和式(7.147)可以求得非相干散射强度为

$$\langle\rho\rho^*\rangle - |\langle\rho\rangle|^2 = [F(\theta_i,\theta_s)]^2\int_{-L}^{L}\exp(iv_x x_d - v_z^2\delta_h^2)[\exp(v_z^2\delta_h^2 C(x_d)) - 1]dx_d \tag{7.148}$$

2. 均方根高度的反演

根据积分恒等式[22]

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\exp(\mathrm{i}Vx)\mathrm{d}x = \frac{\sin VL}{VL} = \mathrm{sinc}(VL) \tag{7.149}$$

式(7.147)可以化简为

$$|\langle\rho\rangle|^2 = (2L)[F(\theta_i,\theta_s)]^2\exp(-v_z^2\delta_h^2)\mathrm{sinc}(v_xL) \tag{7.150}$$

由式(7.150)可以看出随机粗糙面的相干散射主要集中在 v_xL 趋于零的区域。由于粗糙面被照射到的长度 $2L$ 一般比较大，因此，可以得到 $v_x\to 0$，这说明相干散射主要集中在镜向附近。在镜向附近，散射角与入射角满足如下的关系式：

$$\theta_s = \theta_i + \varepsilon \tag{7.151}$$

其中，$\varepsilon\ll\theta_i$。v_x 和 v_z 可以分别近似为

$$v_x \approx k(\theta_i - \theta_s)\cos\theta_i,\quad v_z \approx -2k\cos\theta_i \tag{7.152}$$

将式(7.152)代入式(7.147)得到

$$|\langle\rho\rangle|^2 = [F(\theta_i,\theta_s)]^2\exp(-4k^2\delta_h^2\cos^2\theta_i) \tag{7.153}$$

从式(7.153)可以看出粗糙面的均方根高度可以近似由镜向的相干散射强度反演求出。均方根高度 δ_h 的近似反演公式为

$$\delta_h = \sqrt{\frac{\ln\left(\dfrac{|\langle\rho\rangle|^2}{[F(\theta_i,\theta_s)]^2}\right)}{-4k^2\cos^2\theta_i}} = \sqrt{\frac{\ln\left(\dfrac{|\langle E_s\rangle|^2}{|C_{s2}|^2[F(\theta_i,\theta_s)]^2}\right)}{-4k^2\cos^2\theta_i}} \tag{7.154}$$

通常情况下，只在镜向附近存在相干散射，其他散射方向存在非相干散射。通过实验手段只能测量到镜向的总的散射强度，无法直接测量镜向的相干散射强度。为了利用式(7.154)反演均方根高度，首先对非镜向的非相干散射强度数据进行插值，求得镜向的非相干散射强度；然后从测量得到的镜向的总散射强度中减去非相干散射强度，求解出镜向的相干散射强度 $|\langle E_s\rangle|^2$ 和 $|\langle\rho\rangle|^2$，最后按照式(7.154)估算出粗糙面的均方根高度 δ_h。

3. 相关长度的反演

在粗糙面的双站电磁散射模型中，令 $\theta_n(1\leqslant n\leqslant N)$ 为从 $-90°$ 到 $90°$ 范围内等间距分布的散射角，根据式(7.148)可以求出不同散射角的非相干散射强度

$$I^c(\theta_i,\theta_n) = |C_{s2}|^2\left(\langle\rho(\theta_i,\theta_n)\rho^*(\theta_i,\theta_n)\rangle - |\langle\rho(\theta_i,\theta_n)\rangle|^2\right) \tag{7.155}$$

在估计出粗糙面的均方根高度 δ_h 的基础上，非相干电磁散射强度只跟相关长度 l 有关，为了反演出相关长度，选取以下目标函数：

$$Y(l) = \sum_{n=1}^{N}(\ln I^m(\theta_i,\theta_n) - \ln I^c(\theta_i,\theta_n))^2 \tag{7.156}$$

其中，$I^m(\theta_i,\theta_n)$ 表示不同散射角下测量得到的电磁散射强度。利用无约束极小值直接搜索算法[23]求解式(7.156)的极小值来确定相关长度的最佳取值，搜索算法的基本步骤如下：

第 1 步　任取 $\mu\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，取初始值 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\in[a,b]$，并且 $x_1^{(0)}\neq x_2^{(0)}$，不妨$Y(x_1^{(0)})<Y(x_2^{(0)})$。

第 2 步　若$\frac{|x_2^{(0)}-x_1^{(0)}|}{1-\mu}\geqslant b-a$ 则转到第 3 步，否则重新选择初始点。

第 3 步　若$\frac{|x_2^{(k)}-x_1^{(k)}|}{1-\mu}<\varepsilon$ 则转到第 9 步。$x_1^{(k)}$ 和 $x_2^{(k)}$ 是初始值迭代 k 次后的值，ε 是任意小量，用来决定迭代是否停止。

第 4 步　令 $x_d^{(k)}=x_1^{(k)}-\mu(x_2^{(k)}-x_1^{(k)})$。

第 5 步　若 $Y(x_d^{(k)})\leqslant Y(x_1^{(k)})$ 且 $x_d^{(k)}\in[a,b]$，则令 $x_1^{(k+1)}=x_d^{(k)}, x_2^{(k+1)}=x_1^{(k)}$，$k=k+1$，返回第 3 步。

第 6 步　若 $Y(x_d^{(k)})>Y(x_1^{(k)})$或者 $x_d^{(k)}\notin[a,b]$，则令 $x_s^{(k)}=x_1^{(k)}+\mu(x_2^{(k)}-x_1^{(k)})$。

第 7 步　若 $Y(x_s^{(k)})<Y(x_1^{(k)})$，则令 $x_1^{(k+1)}=x_s^{(k)}, x_2^{(k+1)}=x_1^{(k)}, k=k+1$，返回第 3 步。

第 8 步　若 $Y(x_1^{(k)})\leqslant Y(x_s^{(k)})<Y(x_2^{(k)})$，则令 $x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}, x_2^{(k+1)}=x_s^{(k)}, k=k+1$，返回第 3 步。

第 9 步　取 $l=x_1^{(k)}$，算法结束。

根据以上的一维搜索算法很容易求解出相关长度 l。

4. 数值计算与讨论

以下用数值方法反演了高斯粗糙面的均方根高度和相关长度。首先利用 Kirchhoff 近似求解出不同散射角的电磁散射强度的理论值，将这些理论值加上一组0～2%均匀分布的相对误差模拟实验测量的电磁散射强度。对非镜向的电磁散射强度进行插值估算出镜向的非相干电磁散射强度，进一步求解出镜向的相干电磁散射强度，由式(7.154)估算出均方根高度，然后按搜索算法重构出相关长度。在表 7.3 中给出了三组均方根高度和相关长度的理论值和重构后的值，各参数均以波长 λ 作为归一化单位。通过比较可以看出这种算法估计出的统计参数与理论值比较接近。

表 7.3　δ_h 和 l 的反演值与理论值的比较

δ_h(理论值)	l(理论值)	δ_h(估计值)	l(估计值)
0.08λ	1.284λ	0.084λ	1.321λ
0.0557λ	1.115λ	0.0587λ	1.137λ
0.0318λ	0.995λ	0.0301λ	0.0971λ

7.3　基于遗传算法和粒子群优化的粗糙面参数反演

参数反演对于微波遥感等非接触测量具有重要的意义，对此许多学者已经进行了研究。不同于本章前两节介绍的基于空间场重构理论的粗糙面逆散射算法以及粗糙面统计参数的反演与重构方法，本节首先利用遗传算法对地面参数进行了反演，然后通过 Kirchhoff 近似方法构造海面电磁散射模型，利用遗传算法和粒子群优化对海面参数进行反演，并对这两种方法的反演结果进行了比较。

7.3.1　遗传算法在粗糙面参数反演方面的应用

1. 遗传算法简介

遗传算法是模仿生物遗传学和自然选择机理，通过人工方式构造的一类优化搜索算法，是对生物进化过程进行的一种数学仿真，是进化计算的一种最重要的形式。遗传算法与传统数学模型截然不同，它为那些难以找到传统数学模型的难题找出了一个解决方法。同时，进化计算和遗传算法借鉴了生物科学中的某些知识，从而体现了人工智能这一交叉学科的特点。自从霍兰德(Holland)于 1975 年在他的著作 *Adaptation in Natural and Artificial System* 中首次提出遗传算法以来，经过 30 多年的研究，现在已发展到一个比较成熟的阶段，并且在实际中得到很好的应用[24,25]。

利用遗传算法进行粗糙面参数反演的关键在于建立随机粗糙面的散射模型[26]，并获得粗糙面的后向散射系数。常用的模型有 Kirchhoff 近似模型(KA)、微扰近似模型(SPM)、小斜率近似模型(SSA)和双尺度模型(TSM)等，本节采用 Kirchhoff 近似模型，通过和实验数据的比较，该模型能在很大的尺度范围内和实验数据吻合。

遗传算法建立在自然选择和群体遗传学机理上的随机迭代和进化，具有很强的全局优化搜索能力。该算法将所要求的变量表示成二进制串，根据适者生存的原则，从中选择适应环境的二进制串进行复制，并且通过交叉、变异两种基因操作产生新一代更适应环境的字符串，经过一代代的不断变化，最后收敛到一个最适应环境的串，然后将二进制串进行解码，就可以得到所求变量的最优解，遗传算法的一般流程为：[27]

第 1 步　随机产生初始种群，个体数目一定，每个个体表示为染色体的基因编码。

第 2 步　计算个体的适应度，并判断是否符合优化准则，若符合，输出最佳个体及其代表的最优解，并结束计算；否则转向第 3 步。

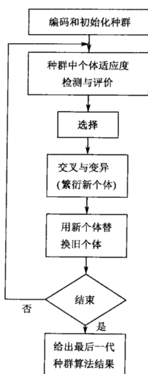


图 7.12　遗传算法基本流程

第 3 步　依据适应度选择再生个体，适应度高的个体被选中的概率高，适应度低的个体可能被淘汰。

第 4 步　按照一定的交叉概率和交叉方法，生成新的个体。

第 5 步　按照一定的变异概率和变异方法，生成新的个体。

第 6 步　由交叉和变异产生新一代种群，返回第 2 步。

基本流程图如图 7.12 所示。遗传算法中的优化准则，一般依据问题的不同有不同的确定方法，可以采用以下的准则之一作为判断条件：

(1) 种群中个体的最大适应度超过预先设定值；

(2) 种群中个体的平均适应度超过预先设定值；

(3) 世代数超过预先设定值。

遗传算法中最常用的编码方式是二进制编码，基因表达将决策变量编码为二进制串，串长取决于需要的精度。例如，x_j 的值域是$[a_j, b_j]$，而要求的精度是小数点后 6 位，这就要求 x_j 的值域至少要分为$(b_j - a_j)\times 10^6$ 份。设 x_j 所需要的子串长为 m_j，则有

$$2^{m_j-1} < (b_j - a_j)\times 10^6 < 2^{m_j} - 1 \tag{7.157}$$

将 x_j 由二进制转为十进制可按下式计算：

$$x_j = a_j + \mathrm{decimal}(\mathrm{substring}_j)\times \frac{b_j - a_j}{2^{m_j} - 1} \tag{7.158}$$

其中，decimal($\mathrm{substring}_j$)表示变量 x_j 的子串 $\mathrm{substring}_j$ 的十进制值。

2. 遗传算法实现粗糙面参数反演的步骤

利用遗传算法进行参数反演首先要选取合适的粗糙面散射模型，本节主要利用 Kirchhoff 近似模型。基于 KA 模型的遗传算法进行粗糙面参数反演的具体步骤为

(1) 选择合适的输入变量，这里选取的是 20°～70°的 VV 极化的后向散射系数值 σ_{VV}^{T} 作为输入；

(2) 选定需要反演参数的取值范围，并由式(7.157)确定编码的长度，确定种群的大小、最大迭代代数、交叉概率和变异概率；

(3) 对所要反演的参数进行编码；

(4) 解码并将数值代入 KA 模型中计算 20°～70°的后向散射系数值 σ_{VV}^{s}；

(5) 构造代价函数 $e=|\sigma_{VV}^{s}-\sigma_{VV}^{T}|^{2}$，并由代价函数值 e 的大小来确定反演参数的适应度，e 值越小，适应度越大；

(6) 对代价函数进行适应度检测与评估，选择适应度高的个体进行交叉和变异，产生新一代个体，然后返回步骤(3)，直到达到需要的精度。

3. 计算结果及讨论

下面用遗传算法来反演土壤湿度和地表参量，主要参量为土壤的单位体积含水量(m_v)、高度起伏均方根(σ)和相关长度(l)。根据上面的编码策略，取它们的精度为小数点后 6 位，m_v 的取值范围是 0～0.4g/cm³，σ 的取值范围是 0～0.01cm，l 的取值范围是 0～0.1cm，那么可以确定出三个变量的编码长度分别为 19，14，17，再将二进制编码转化成十进制数值。取每一代群体的大小为 80，最大迭代代数为 1000，交叉概率为 25%，变异概率为 2%。这样就可以得到理想的参数反演结果。

在进行参数反演时，取入射波频率为 4.75GHz，土壤的含沙量为 5%，土壤的含黏土量为 47.4%，温度为 23℃，输入的数值是 20°～70°的 6 个后向散射系数值，极化状态为 VV 极化。当反演湿度时，高度均方根和相关长度固定为 0.004cm 和 0.084cm；当反演均方根时，土壤湿度和相关长度固定为 0.15g/cm³ 和 0.084cm；当反演相关长度时，土壤湿度和均方根高度固定为 0.15g/cm³ 和 0.004cm。

表 7.4～表 7.6 给出了地面参数反演结果。从表中可以看出只要选定合适的参量，就可以获得很好的反演结果，其中，湿度预测的最小相对误差为 0.03%，最大相对误差为 2.46%；高度起伏均方根的最小相对误差为 0，最大相对误差为 7.0%；相关长度的最小相对误差为 0.83%，最大相对误差为 17.2%，总的来说湿度预测的结果比高度起伏均方根和相关长度的预测效果要好，这主要是因为随着相关长度的增大，土壤的后向散射系数变化很小。

表 7.4 湿度 m_v 预测结果 单位：g/cm³

输入值	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4
预测值	0.04877	0.0985	0.15064	0.20201	0.24922	0.29859	0.3506	0.39988
相对误差	2.46%	1.5%	0.43%	1.01%	0.31%	0.47%	0.17%	0.03%

表 7.5 均方根 δ 预测结果 单位：mm

输入值	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
预测值	0.0107	0.0202	0.0287	0.04	0.0508	0.0602	0.0695	0.0801	0.0934	0.0994
相对误差	7%	1%	4.33%	0%	1.6%	0.33%	0.71%	0.13%	3.78%	0.6%

表 7.6 相关长度 l 预测结果 单位:mm

输入值	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
预测值	0.0987	0.2344	0.2975	0.3703	0.4732	0.583	0.6793	0.8659	0.9274	0.944
相对误差	1.3%	17.2%	0.83%	7.43%	5.36%	2.83%	2.96%	8.24%	3.04%	5.6%

7.3.2 粒子群优化在海上风速反演方面的应用

1. 粒子群优化算法简介

粒子群优化(particle swarm optimization, PSO)算法是一种基于群智能(swarm intelligence)方法的演化计算(evolutionary computation)技术。PSO 同遗传算法类似,是一种基于群体(population)的优化工具。系统初始化为一组随机解,通过迭代搜寻最优值。但是并没有遗传算法用的交叉(crossover)以及变异(mutation)操作,而是粒子(潜在的解)在解空间追随最优的粒子进行搜索。与遗传算法比较,PSO 的优势在于简单容易实现同时又有深刻的智能背景,既适合科学研究,又特别适合工程应用。因此,PSO 一提出立刻引起了演化计算等领域的学者们的广泛关注,并在短短的几年时间里出现大量的研究成果,形成了一个研究热点[28]。PSO 最早是由 Kennedy 和 Eberhart 于 1995 年提出的。受到人工生命(artificial life)的研究结果启发,PSO 的基本概念源于对鸟群捕食行为的研究。设想这样一个场景:一群鸟在随机搜寻食物,在这个区域里只有一块食物,所有的鸟都不知道食物在哪里,但是它们知道当前的位置离食物还有多远,那么找到食物的最优策略是什么呢? 最简单有效的就是搜寻目前离食物最近的鸟的周围区域。PSO 从这种模型中得到启示并用于解决优化问题。PSO 中,每个优化问题的潜在解都是搜索空间中的一只鸟,称之为"粒子"。所有的粒子都有一个由被优化的函数决定的适应值(fitness value),每个粒子还有一个速度决定它们飞翔的方向和距离。PSO 初始化为一群随机粒子(随机解)。然后通过迭代找到最优解。在每一次迭代中,粒子通过跟踪两个"极值"来更新自己。第一个就是粒子本身所找到的最优解。这个解称为个体极值(Pbest)。另一个极值是整个种群目前找到的最优解,这个极值是全局极值(Gbest)。另外,也可以不用整个种群而只是用其中一部分作为粒子的邻居,那么在所有邻居中的极值就是局部极值。

假设在一个 N 维目标搜索空间中,由 m 个粒子组成一个群落,其中,第 i 个粒子在 N 维空间里的位置 $\boldsymbol{X}_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iN})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,m)$,飞行速度 $\boldsymbol{V}_i=(v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{iN})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,m)$,适应值 $\mathrm{fitness}_i=f(\boldsymbol{X}_i)$,则 Pbest_i 和 $X_i^{\mathrm{Pbest}}=(x_{i1}^{\mathrm{Pbest}},x_{i2}^{\mathrm{Pbest}},\cdots,x_{iN}^{\mathrm{Pbest}})^{\mathrm{T}}$ 分别为第 i 个粒子曾经达到的最大适应值及其对应的位置。Gbest 为在群体所有粒子经历过的最好位置,则对每一代,其位置和速度的第

d 维根据如下方程更新：

$$v_{id} = wv_{id} + c_1 r_1 (x_{id}^{\text{Pbest}} - x_{id}) + c_2 r_2 (x_d^{\text{Gbest}} - x_{id}) \tag{7.159}$$

$$x_{id} = x_{id} + v_{id} \tag{7.160}$$

其中，v_{id} 为粒子 i 飞行速度矢量的第 d 维分量，x_{id} 为粒子 i 位置矢量的第 d 维分量，r_1，r_2 为[0,1]之间的随机数，c_1，c_2 为加速度系数，也称为学习因子，c_1 调节粒子向自身最优位置飞行的步长，c_2 调节粒子向全局最优位置飞行的步长，w 为惯性权值。第 $d(1\leqslant d\leqslant N)$ 维的位置变化范围为 $[-X_{\max_d}, X_{\max_d}]$，第 $d(1\leqslant d\leqslant N)$ 维的速度变化范围为 $[-V_{\max_d}, V_{\max_d}]$。当 $V_{\max_d}$ 较大时，粒子的飞行速度较大，有利于全局搜索，但有可能飞过最优解；$V_{\max_d}$ 较小时，粒子可在特定区域内精细搜索，但容易陷入局部最优。迭代中若位置和速度超过边界范围则取边界值。式(7.159)中，首项为粒子先前的速度；$c_1 r_1 (x_{id}^{\text{Pbest}} - x_{id})$ 项为认知项(cognitive term)，该项与粒子的认知经验相关；$c_2 r_2 (x_d^{\text{Gbest}} - x_{id})$ 项为社会项(social term)，它代表粒子间的信息共享与合作。式(7.160)为粒子 i 的新坐标位置。它们共同决定粒子 i 下一步的运动位置[29]。

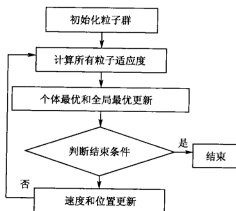


图 7.13　粒子群优化基本流程

粒子群优化的基本流程图如图 7.13 所示，其一般步骤如下：

第 1 步　初始化一群粒子。

第 2 步　评价每个粒子适应度。

第 3 步　对每个粒子，将其适应度与其经历过的最好位置 Pbest 比较，如果较好，则更新 Pbest，将其作为当前的最好位置 Pbest。

第 4 步　对每个粒子，将其适应度与全局所经历的最好位置 Gbest 比较，如果较好，则更新 Gbest，将其作为当前的最好位置 Gbest。

第 5 步　根据式(7.159)和式(7.160)更新粒子的速度和位置。

第 6 步　如未达到结束条件(最大迭代次数或足够好的适应度)，返回第 2 步。

2. 粒子群优化实现粗糙面参数反演的步骤

同遗传算法类似，粒子群优化算法进行参数反演首先要选取合适的粗糙面散射模型，本节同样利用基尔霍夫近似模型。基于 KA 模型的粒子群优化算法进行粗糙面参数反演的具体步骤如下：

(1)选择合适的输入变量，这里选取的是 20°～70°的 VV 极化的后向散射系数值 σ_{VV}^{T}作为输入。

(2)选定需要反演参数的取值范围，确定种群的大小、最大迭代代数、粒子的位置和速度的取值范围。

(3)初始化种群中的粒子的位置和初速度以及全局最优和个体最优，个体最优的初始值为粒子的初始位置，全局最优的初始值为所有粒子中的最优的初始位置。

(4)计算每个粒子的适应度：将初始数值代入 KA 模型中计算 20°～70°的后向散射系数值 σ_{VV}^{s}，构造代价函数 $e = \sum_{\theta} |\sigma_{VV}^{s} - \sigma_{VV}^{T}|^2$，并由代价函数值 e 的大小来确定反演参数的适应度，e 值越小，适应度越大。

(5)更新全局最优和个体最优。

(6)根据式(7.159)和式(7.160)更新粒子的位置和速度。

(7)判断结束条件，若满足则结束，否则返回步骤(4)。

3. 计算结果及讨论

根据 Kirchhoff 近似计算海面电磁散射的模型，利用遗传算法和粒子群优化算法反演海面上方的风速，并将两种方法进行了比较，取海水的相对介电常数取(48.0，35.0)，入射波频率范围为 0.1～10.0GHz，海面上方风速取值范围为0.1～10.0m/s。

用遗传算法反演一维介质海面参数时，取精度为小数点后 6 位，则由式(7.157)可以确定入射波频率和海面上方风速两个变量的编码长度都为 14，再由式(7.158)就可以将二进制编码转化成十进制数值。初始化种群时产生两个 14 位的二进制串分别代表入射波频率和海面上方风速，再由式(7.158)解码可把二进制串转化为十进制值，即为入射波频率和海面上方风速的初始值。扩大群体规模可以防止早熟现象的发生，因此，一般要求群体具有一定的规模。交叉是遗传算法的主要操作，因此，交叉概率一般取一个较大的值，但交叉概率过大可能使算法变为随机搜索，过小则可能产生早熟；变异可以提高群体的多样性，为防止早熟起到一定作用。但因其具有很强的破坏性，所以变异概率一般取很小。这里取群体的大小为 80，最大迭代代数为 1000。取交叉概率为 25%，变异概率为 2%。

用粒子群优化算法来反演一维介质海面的参数时，取每一代群体的大小为 40，最大迭代数为 100，$c_1 = c_2 = 2$，w 是一个小于或等于 1 的正数，w 较大适于对解

空间进行大范围的探查，w 较小适于进行小范围开挖，由于所取的模型比较简单，w 取一个定值 $w=1$。由式(7.159)和式(7.160)更新粒子的位置和速度时，需要限定位置和速度的范围，参数 u 的位置矢量用 x_u 表示，取值范围为 $x_u \in [X_{u\min}, X_{u\max}]$，参数 U 的速度矢量用 v_u 表示，取值范围为 $v_u \in [-V_{u\min}, V_{u\max}]$，参数 f 的位置矢量用 x_f 表示，取值范围为 $x_f \in [X_{f\min}, X_{f\max}]$，参数 f 的速度矢量用 v_f 表示，取值范围为 $v_f \in [-V_{f\min}, V_{f\max}]$。在这里取 $X_{u\max}=10.0\text{m/s}$，$X_{u\min}=0.1\text{m/s}$，$X_{f\max}=10.0\text{GHz}$，$X_{f\min}=0.1\text{GHz}$，$V_{u\max}=2.5\text{m/s}$，$V_{f\max}=2.5\text{GHz}$，在更新粒子的位置和速度时，需注意：若 $x_u>X_{u\max}$，则 $x_u=X_{u\max}$；若 $x_u<X_{u\min}$，则 $x_u=X_{u\min}$；若 $x_f>X_{f\max}$，则 $x_f=X_{f\max}$；若 $x_f<X_{f\min}$，则 $x_f=X_{f\min}$；若 $v_u>V_{u\max}$，则 $v_u=V_{u\max}$；若 $v_u<-V_{u\max}$，则 $v_u=-V_{u\max}$；若 $v_f>V_{f\max}$，则 $v_f=V_{f\max}$；若 $v_f<-V_{f\max}$，则 $v_f=-V_{f\max}$。

表 7.7 和表 7.8 给出了采用 GA 和 PSO 反演海面上方风速的结果和真实值之间的比较，可见两种方法的反演值与真实值都基本吻合。

表 7.7　GA 反演海面上方风速(m/s)的数值

频率固定 f=5GHz	真实值	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
	反演值	0.99915	1.99861	2.99927	3.99994	4.99879
	真实值	6.0	7.0	8.0	9.0	\
	反演值	5.99945	7.00012	8.00018	9.00024	\

表 7.8　PSO 反演海面上方风速(m/s)的数值

频率固定 f=5GHz	真实值	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
	反演值	1.00025	2.00103	3.00299	4.00013	4.99992
	真实值	6.0	7.0	8.0	9.0	\
	反演值	5.99945	7.00012	8.00018	9.00024	\

对于两种优化算法，在选取的模型较为简单的情况下，反演精度都能令人满意。表 7.9 给出了反演海面上方风速时两种优化方法进化代数的比较。从表中比较可以看出遗传算法进化收敛代数一般比粒子群优化进化收敛代数要多。需要说明的是由于遗传算法和粒子群优化的种群的初始化都是随机的，因此，初始化种群后，种群可能离最优值很近，也可能离最优值很远，所以并非遗传算法比粒子群优化收敛代数一定多很多，如表 7.9 中 $U_{19.5}=5\text{m/s}$ 时的数据所示，GA 用了 16 代收敛，而 PSO 用了 13 代收敛。但从总体上来说，遗传算法需进化到 500 代之后基本可以收敛，而粒子群优化则在 60 代以后就能收敛，在效率方面粒子群优化也要比遗传算法提高了若干倍。

表 7.9 反演风速时两种方法进化代数的比较(f=5GHz)

$U_{19.5}$/(m/s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
GA	766	161	283	358	16	650	348	151	218
PSO	83	62	44	5	13	48	59	49	4

需要说明的是,在以上反演过程中,对于海面参数的反演,只要在海面满足Kirchhoff近似的条件下,就能取得很好的结果,这里,根据文献[30]海水相对介电常数取为(48.0, 35.0)。事实上,海水的相对介电常数与电磁波频率、海水的温度和海水的含盐度有一定的函数关系,它主要影响Fresnel反射系数。在不同的温度、不同的频率和不同的含盐量的情况下,相对介电常数是个不同的值。以下给出根据文献[31]海水的相对介电常数取(70.37, 69.60)的反演结果,其他参数与海水相对介电常数为(48.0, 35.0)时类似,频率仍固定在f=5GHz。表7.10和表7.11给出了相对介电常数取(70.37, 69.60),GA和PSO两种方法反演海面上方风速的结果与真实值的比较。可以看出介电常数的变化对反演精度和效率影响不大,反演结果与(48.0, 35.0)时的反演结果类似。

表 7.10 介电常数取(70.37, 69.60)时 GA 反演风速(m/s)真实值与反演值的比较

频率固定 f=5GHz	真实值	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
	反演值	0.99975	1.99981	3.00108	3.99933	5.0006
	真实值	6.0	7.0	8.0	9.0	\
	反演值	6.00066	6.99951	8.00018	9.00024	\

表 7.11 介电常数取(70.37, 69.60)时 PSO 反演风速(m/s)真实值与反演值的比较

频率固定 f=5GHz	真实值	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
	反演值	1.00145	2.00116	3.0001	3.99997	5.00004
	真实值	6.0	7.0	8.0	9.0	\
	反演值	5.99899	6.99671	8.00053	9.00064	\

经过对比发现遗传算法在通过遗传和变异的收敛过程中有一定的"尝试性",因而花费了较长的计算时间,进行了较多的进化迭代,最终逐渐收敛到最优解的,收敛速度较慢。粒子群优化算法初期,其解群随进化代数而言表现了更强的随机性,正是由于其产生下一代解群的较大的随机性,以及每代所有解的"信息"的共享性和各个解的"自我素质"的提高,如解群随进化代数的变化过程中存在"掉队"个体的"归队"现象,这样,就使得每代种群中的解具有"自我"学习提高和向"他人"学习的双重优点,使得其下代解有针对性地从"先辈"那里继承更多的信息,在这种"自我提高"和"取人之长,补己之短"的前提下,很快就达到了群体最优,从而能在

较少的代数内找到最优解。

从反演结果可以看出遗传算法和粒子群优化都可以反演得到较为满意的结果。而遗传算法是基于生物进化的“适者生存”的原理。自然界的生物总是朝着适应环境的方向进化，因此，用遗传算法的每一代个体总是继承了上一代绝大多数的优良传统，并且能够产生比上一代更优的特性。但进化过程注定是一个漫长的过程。粒子群优化相对于遗传算法，没有交叉和变异操作，粒子只是通过内部速度进行更新，因此，原理更简单、参数更少、实现更容易。但鸟群寻食过程是一个随机性较大的过程，粒子对搜索空间的搜索不一定很完整。在实现效率方面，粒子群优化要大大优于遗传算法。但在反演精度方面，遗传算法要优于粒子群优化。本节选取的随机海面的散射模型相对比较简单，因此，运用粒子群优化反演的结果已经能够令人满意了。

7.4　神经网在粗糙面与目标复合散射模型建立中的应用

由于粗糙面散射场建模数据测量工作量大，并且动态粗糙面的散射场随入射散射角变化关系曲线振荡较大，直接使用这些数据比较麻烦，所以通常需要根据已有模型数据建立工程模型。人工神经网络(artificial neural network, ANN)由于其自身的特点，比较适合用来建立粗糙面与目标复合散射场的计算模型。本节利用径向基函数(radial basis function, RBF)神经网络建立基于导体粗糙面与上方简单目标的复合散射模型。主要采用第 6 章中介绍的 KA 与 MOM 相结合的混合方法的相关数值结果作为训练数据，来建立神经网络散射模型，部分数据用做模型校验。通过各种情况下参与建模及未参与建模的数据同神经网络输出的对比，证明利用建立起来的神经网模型可以较好地输出导体随机粗糙面与上方简单目标在不同入射角度、高度、尺寸等参数下的复合散射场，同时表明神经网络建立的模型具有精度较高，推广能力强等优点，具有一定的工程使用价值。

7.4.1　神经网络的基本理论

人工神经网络[32]是人们在对大脑生物神经网络的认识基础上，人工构建的能够实现某种功能的信息处理系统。神经网络系统具有集体运算的能力和自适应的学习能力，并且还具有很强的容错性和鲁棒性，善于联想、综合和推广，在函数逼近、模式识别、专家系统、优化组合、智能控制等领域得到广泛的应用[33,34]。

通常情况下，粗糙面与目标的复合散射模型可看成是一种映射，这种映射直接反映的是散射数据(散射场或散射系数)与粗糙面及目标之间的联系。显然，这种映射关系应该是多对多的非线性关系，通常很难得到一般的解析模型。神经网络是大量与自然神经系统的神经细胞类似的人工神经元(简单的计算处理单元)互联

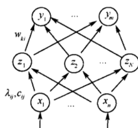


图 7.14 RBF 神经网络结构示意图

而成的，具有某些智能功能的非线性系统，它特别适合于解决这种多对多的非线性映射问题。本节利用 RBF 神经网络进行粗糙面与目标的复合散射建模。RBF 网络由三层组成，其结构如图 7.14 所示。输入层的节点作用是传递输入信号到隐层，隐层节点（也称 RBF 节点）由像高斯核函数那样的函数构成，而输出层节点通常是简单的线性函数。隐层节点中的作用函数（核函数）对输入信号将在局部产生响应，也就是说，当输入信号靠近核函数的中央范围时，隐层节点将产生较大的输出。由此可看出这种网络具有局部逼近能力，所以径向基函数网络也称为局部感知场网络。假定输入为 x_j，第 i 个隐层节点处的总输入可以表示为

$$\gamma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j - c_{ij}}{\lambda_{ij}}\right)^2} \tag{7.161}$$

其中，$i=1,2,\cdots,N$，N 为隐层节点的总个数。第 i 个隐层节点处的总输出为 $z_i=\sigma(\gamma_i)$，$\sigma(\gamma)$是径向基函数。RBF 神经网络总的输出可以表示为

$$y_k = \sum_{i=0}^{N} w_{ki} z_i \tag{7.162}$$

其中，w_{ki}是第 i 个隐层节点与第 k 个输出层节点之间的权链。w_{ki}，c_{ij} 和 λ_{ij} 组成了神经网的训练参数，其各自的角标取值范围为 $k=1,2,\cdots,m(i=1,2,\cdots,N)$

有了散射模型，不同的粗糙面及目标参数会产生不同的散射系数，若干组粗糙面和目标参数及由此得到的散射系数就构成了网络的训练数据。事实上，也可以用实测数据作为训练数据，但实测数据的获得通常较困难，因此，本节利用第 6 章介绍的 KA 与 MOM 相结合的混合算法来产生训练数据。

1. 建立模型（训练网络）

利用混合算法计算得到多组粗糙面与上方简单目标的复合散射数据，从中选出若干组数据，作为神经网络的训练样本数据（训练模型），另外选取若干组数据用来验证网络的推广能力（验证模型），如图 7.15 所示。

粗糙面的散射数据一般是散射系数和入射角、散射角的关系曲线。首先选择网络输入（如由入射角、散射角及目标尺寸、大小等参数组成）和输出（如复合散射系数），创建神经网络，设定好网络神经元数和预期误差，随机生成网络权值和阈值，把用来建模的数据输入网络，由网络计算输出，然后和预定输出进行比较。若误差较大，则按一定的规则调整网络参数，经过循环不断地调整网络参数，直到网络输出和预定输出误差小于指定的值，则训练结束，这时的神经网则体现了粗糙面

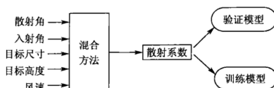


图 7.15　混合算法用于产生散射数据

散射系数与入射角、散射角、目标尺寸等参数的映射关系，保存此时的网络权值和阈值供以后的网络计算使用。

2. 验证模型

第 1 步　验证网络模型对于参与训练的数据的匹配性。建立网络模型，装入保存的网络权值和阈值，将参与训练的入射角、散射角和目标尺寸等参数作为输入数据，使用训练好的网络模型计算其相应的散射系数(即网络仿真)，计算结果(网络输出)和混合算法得到的目标数据(用来验证模型的散射数据)进行比较。若一致，说明网络模型对于参与训练数据匹配正确。

第 2 步　验证神经网络模型对于未参与训练数据的匹配性，目的是验证模型的推广能力。建立网络模型，装入网络权值和阈值，选取未参与模型训练的入射角、散射角、目标尺寸等数据组成网络输入，使用网络模型计算得到相应的网络输出(复合散射系数)。将网络输出与混合算法得到的目标数据进行比较。若一致，则说明网络模型对未参与模型训练的数据匹配也是正确的。

只有通过前面两步验证，才能说明模型是正确的，可以保留下来使用，否则模型是不成功的，必须重新训练模型。

综合以上(1)、(2)的过程，可以用如图 7.16 的流程示意图表示。

7.4.2　基于 RBF 神经网络的粗糙面与目标复合散射模型建立

由于粗糙面与目标的复合散射系数角分布曲线振荡较大，直接使用这些数据比较麻烦，通常需要根据已有散射数据建立工程模型。而神经网络自身的特点，比较适合用来建立复合散射工程模型。首先根据需要选择合适的输入及输出，其中输出量是复合散射系数，记为 $t=[\mathrm{deta}]$，输入量可以是入射、散射角等信息。例如，本节在对不同目标半径的复合散射场进行建模时就把入射、散射角及目标半径等作为输入量，记为 $p=[\theta_i,\theta_s,r]$，其中，r 代表目标半径。网络的权值和阈值即反映了输出 $t=[\mathrm{deta}]$和输入 $p=[\theta_i,\theta_s,r]$之间的函数映射关系。目的就是通过使用训练数据对神经网进行训练，找到合适的网络权值和阈值，从而确定这样的映射关系，建立粗糙面与目标的复合散射模型。

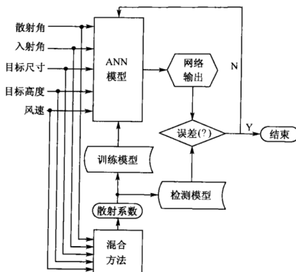


图 7.16　神经网络建模流程示意图

为了验证神经网络对海面复合电磁散射建模的正确性，需要用未参与模型训练的入射角、散射角、目标半径、高度等信息作为输入数据，使用训练好的网络模型计算复合散射系数，计算结果和目标数据进行比较，若一致，说明网络模型对于参与训练数据匹配正确。同时，为了检验神经网模型对于目标和环境参数均改变时复合散射建模的可靠性，本节利用第 6 章中的混合算法计算了高斯粗糙面及目标(圆柱、方柱)的双站复合散射系数，作为神经网的训练数据、训练网络，并将训练好的神经网模型的网络输出同参与训练及未参与训练的目标数据进行比较以验证神经网的正确性。

1. 对不同入射角情况下的复合电磁散射建模及结果分析

图 7.17 首先给出了不同入射角的建模结果，其中，图 7.17(a)训练神经网时采用了入射角分别是 10°，50°，60°和 70°下的散射数据作为输入量。在网络训练完毕后，采用参与训练的 $\theta_i=50°$的散射数据作为网络的输入参量来验证网络的正确性，即 $p=[50°,\theta_s,r]$，这只是第一步验证，判定神经网络建模的正确性，还需要进行第二步验证，即需要把未参与训练的数据作为输入，使用训练好的网络模型输出数据，并同时和目标数据进行比较，图 7.17(b)即给出了第二步验证的结果，使用未参与训练的 $\theta_i=30°$的散射数据对网络模型进行检验。图 7.17(a)和(b)中的目标均为无限长导体圆柱，半径 $r=0.1\lambda$，散射角 θ_s 的取值范围为 $-80°\sim80°$。由图中可以发现分别利用入射角为 30°，50°的散射数据作为输入验证模型时，神经网络模型均能较好的模拟出复合散射系数曲线的变化趋势。为了进一步验证利用神经网对一维导体粗糙面与上方二维无限长任意截面导体目标复合电磁散射建模的可

靠性，这里还利用混合算法得到了一维高斯导体粗糙面与上方二维无限长导体方柱的复合散射系数，作为神经网络的训练数据来进行建模，如图 7.18 所示。图中，虚线表示未参与训练的海面复合散射场，而实线则表示由训练好的神经网络模型输出的复合散射曲线。

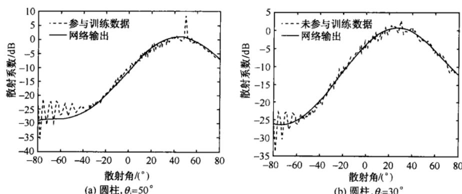


图 7.17　高斯粗糙面与上方圆柱目标复合散射神经网模型的验证

在对横截面为正方形的目标及粗糙面的复合散射进行建模时，假定方柱截面(正方形)有一边与粗糙面平行，并且其对角线的交点与粗糙平面的距离 $h=4\lambda$，取方柱的边长 $a=2\lambda$，4λ 两种情况。参与训练的数据也是入射角分别为 10°，30°，60° 及 70°时的复合散射数据，在第 2 步验证中，均采用未参与训练的 $\theta_i=50°$ 的散射数据用来对网络模型进行检验。可以看出网络输出与未参与训练数据的散射曲线变化趋势有一定吻合。比较图 7.17 和图 7.18 可以看出目标为方柱时的复合散射情况比圆柱情况更为复杂，所以曲线振荡性比圆柱更剧烈。而当散射系数振荡较大时，神经网络模型对复合散射场的建模效果就较差，所以在进行神经网建模前，对输入数据进行一定的处理还是必要的，另外，还可以通过增加训练数据、训练次数来减小网络误差。

2. 对目标不同尺寸下的复合电磁散射建模及结果分析

对粗糙面与上方目标的复合散射在目标不同尺寸情况下进行建模时，选取的目标为方柱，分别在入射角为 30°和 60°下对不同目标尺寸的神经网络进行建模，如图 7.19 所示。模型中方柱高度 $h=4\lambda$。参与训练的数据分别为边长 $a=0.2\lambda$，1.0λ，2λ，4λ 对应的复合散射系数，取方柱边长 $a=3.0\lambda$ 时的散射数据作为网络的校验参量。从图中可以看到网络输出的结果基本上能模拟出目标数据的分布轮廓。

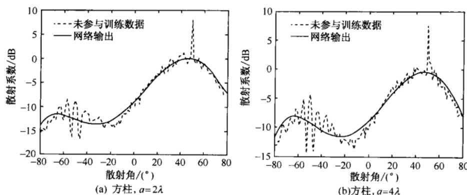


图 7.18　神经网输出与未参与训练 $\theta_i=50°$结果的对比

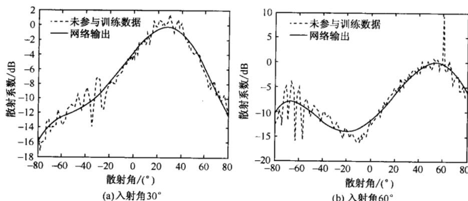


图 7.19　目标为方柱时未参与训练的目标数据($a=3\lambda$)同网络输出的比较

3. 对目标不同高度下的复合电磁散射建模及结果分析

对粗糙面与上方目标的复合散射在目标不同高度的情况下进行建模时，分别给出了目标为无限长圆柱和方柱的结果。当粗糙面上方为圆柱目标时，采用三组数据来训练网络，即 $h=2\lambda,10\lambda,20\lambda$，其中，圆柱半径为 $h=\lambda$，入射角 $\theta_i=60°$；当粗糙面上方目标为方柱时，同样采用 $h=2\lambda,10\lambda,20\lambda$ 对应的复合散射场数据作为神经网的训练数据，其中，方柱边长为 $a=2\lambda$，入射角 $\theta_i=30°$。在网络训练完毕后，均采用未参与训练的目标数据 $h=8\lambda$ 的散射数据 $p=[\theta_i,\theta_s,h=8\lambda]$来验证神经网的正确性。图 7.20 给出了未参与训练的目标数据($h=8\lambda$)同网络输出的比较。由图中可以看出由于目标尺寸相对较小，无论是圆柱目标还是方柱目标，其与粗糙面的复合散射曲线振荡较小，利用神经网络模拟的结果都能较好地反映散射曲线的分布轮廓。

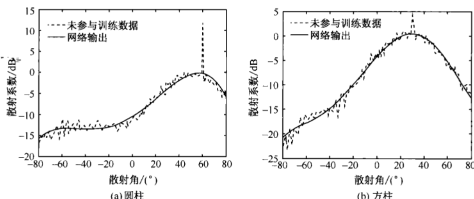


图 7.20　未参与训练的目标数据($h=8\lambda$)同网络输出的比较

参考文献

[1] El-Shenawee M, Miller E L. Multiple-incidence and multi-frequency for profile reconstruction of random rough surfaces using the 3-D electromagnetic fast multipole model. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 2004, 42(11): 2499～2510.

[2] Harada K, Noguchi A. Reconstruction of two dimensional rough surface with Gaussian beam illumination. IEICE Trans Electronics, 1996, E79-C(10): 1345～1349.

[3] Potthast R. A point source method for inverse acoustic and electromagnetic obstacle scattering problems. IMA Journal of Applied Mathematics. 1998, 61(2): 119～140.

[4] Potthast R. Point Sources and Multipoles in Inverse Scattering Theory. Florida: CRC Press, 2001.

[5] Tsang L, Chan C H, Kyung P et al. Monte-Carlo simulations of large-scale problems of random rough surface scattering and applications to grazing incidence with the BMIA/canonical grid method. IEEE Trans Antennas Propagat, 1995, 43(8): 851～859.

[6] Tarantola A. Inverse Problem Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

[7] Tikhonov A N, Arsenin V A. Solution of Ill-posed Problems. Washington, DC: Winston & Sons, 1977.

[8] Thorsos E I. The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum. J Acoust Soc Am. 1988, 83(1): 78～92.

[9] 王一平，陈逢时，傅德民．数学物理方法．北京：电子工业出版社，2006.

[10] Arfken G B, Weber H J. Mathematical Methods for Physicists, International Edition. New York: Academic Press, 1995.

[11] 任玉超．随机粗糙面的电磁散射与逆散射的若干问题. 西安：西安电子科技大学博士学位论文，2008.

[12] 陈文建，谢家纯，徐军等．具有分形结构的 SiC/SiO_2 界面的粗糙散射．计算物理，2004，21(4)：311～315.

[13] Giuseppe R, Blanco-Sanchez P, Iodice A et al. Synthesis, construction, and validation of a fractal surface. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 2006, 44(6): 1403～1412.

[14] Giorgio F, Iodice A. Scattering from natural rough surfaces modeled by Fractional Brownian Motion two-dimensional processes. IEEE Trans Antennas Propagat, 1999, 47(9): 1405～1415.

[15] 郭立新，吴振森．二维分数布朗运动随机粗糙面电磁散射的基尔霍夫近似．物理学报，2001，50(1)：42～47.

[16] 郭立新，吴振森．fBm 随机粗糙面电磁散射的微扰法近似．微波学报，2001，17(2)：60～66.

[17] Pesquet-Popescu B, Levy-Vehel J. Stochastic fractal models for image processing. IEEE Signal Processing Magazine, 2002, 19(5): 48～62.

[18] Lance M K. Texture roughness analysis and synthesis via extended self-similar (ESS) model. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1995, 17(11): 1043～1056.

[19] Alexander G V. Wave Scattering from Rough Surfaces. NewYork: Spring-Verlag, 1994.

[20] Le C T C, Ishimaru A, Kuga Y et al. Angular memory and frequency interferometry for mean height profiling of a rough surface. IEEE Trans Geoscience Remote Sensing, 1998, 36(1): 61～71.

[21] Lancaster H O. The Chi-Squared Distribution. New York: John Wiley & Sons Inc, 1969.

[22] Beckmann P, Spizzichino A. The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces. New York: Pergamon, 1963.

[23] 蔡志杰，陈德强．非线性优化的直接搜索算法及收敛性证明．复旦学报(自然科学版)．2006，45(3)：396～411.

[24] 蔡自兴，徐光祐．人工智能及其应用．北京：清华大学出版社，2004.

[25] 玄光南，程润伟．遗传算法与工程优化．北京：清华大学出版社，2004.

[26] 王悦泉，金亚秋．陆地表面粗糙度和土壤湿度多维参数同时反演得遗传算法．遥感学报，2000，4(2)：90～94.

[27] 王小平，曹立明．遗传算法——理论、应用与软件实现．西安：西安交通大学出版社，2002.

[28] 李爱国，覃征，鲍复民等．粒子群优化算法．计算机工程与应用，2002，38(21)：1～3.

[29] 沈艳，郭兵，古天祥．粒子群优化算法及其与遗传算法的比较．电子科技大学学报，2005，34(5)：696～699.

[30] Ulaby F T, Moore R K, Fung A K. Microwave Remote Sensing (Active and Passive) I, II and III. Upper Saddle River: Addison-Wesley, 1982.

[31] 董庆，郭华东．合成孔径雷达海洋遥感．北京：科学出版社，2005.

[32] Matthew Z. Neural Networks in Artificial Intelligence. New York: Ellis Horwood, 1990.

[33] Sarabandi K, Li E S, Nashashibi A. Modeling and measurements of scattering from road surfaces at millimeter-wave frequencies. IEEE Trans Antennas Propagat, 1997, 45(11): 1679～1688.

[34] Zhao K G, Shi J C, Zhang L X et al. Retrieval of bare soil surface parameters from simulated data using neural networks combined with IEM. IEEE Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2003, 6: 3881～3883.